EBS

수능개념 수학

김소연의 희망날개

미적분 I



EBS

www.ebsi.co.kr


"꿈으로 빚고 땀으로 다듬어
내일을 완성하세요"
명작을 위해 일생을 바치는 도공은 말합니다.
흙, 물, 불 등 수십 가지 조건에 따라
결과는 천지차이로 달라진다고요.
하지만 보다 중요한 것은 마음가짐이겠지요.
목표를 향해 흔들리지 않는 꾸준한 노력이
남다른 결과를 낳는 법이니까요.
눈부시게 빛나는 당신의 내일을 기다리며
EBS교재가 든든한 비팀목이 되어드릴게요.
남다른 실력을 만드는 교재의 명작
EBS

수능개념 수학

김소연의 희망날개 미적분 I





▶ 강사 **김소연** 선생님

약력
– (현)과학영재학교경기과학고등학교 교사(2012~)
– 수학 석사 졸업(복소함수론 전공), 수학교육학 박사과정
– 창의 인성 교육과정 구성 공동연구원
– 2009개정 교육과정 교과서 및 교사용 지도서 집필
– EBS수능 연계교재 검토 위원(2013~)

저서
– 2009개정교육과정 교과서 및 교사용 지도서
– 창의인성 교육과정 교수학습자료

한 심리학자가 2m를 점프하는 야생의 벼룩을 가지고 이러한 실험을 했다고 합니다. 폭이 1m인 정육면체 상자에 벼룩을 넣고, 몇달간 생활하게 한 뒤, 다시 벼룩을 꺼냈다고 합니다. 그런데 신기하게도 이 벼룩은 상자보다에서도 1m 밖에 뛰지 못했다고 합니다.

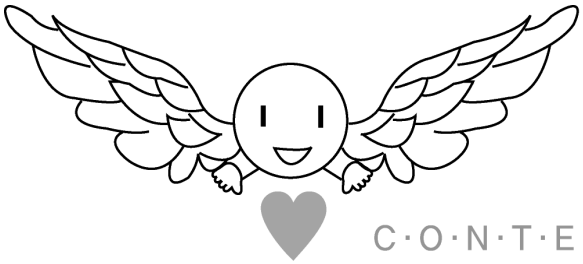
학교에서 배웠던 이 학자는 이번에 폭이 50cm인 작은 상자에 이 벼룩을 다시 넣고, 몇달간 생활하게 했다고 합니다. 시간이 흐르고, 다시 이 벼룩을 상자 밖으로 꺼냈을때, 어떻게 되었을까요?

여러분이 예상하는 것과 같습니다.
놀랍게 세상에 나온 이 벼룩은 50cm 밖에 뛰지 못했다고 합니다.

자, 여러분은 무엇을 느끼나요?
혹시 공부에 대한 두려움 때문에 여러분 스스로의 능력을 너무 작게 생각하고 있는 것은 아닐까요?

여러분 스스로 1 cm 의 틀을 깨고 나와야만,
그리고, 여러분 스스로의 능력을 더 크게 믿어야만,

더 높게! 더 멀리!
점프 할 수 있습니다!
놀랍게 할 수 있을거에요! 시작해 보세요 !!!



C·O·N·T·E·N·T·S

I 미적분 I을 위한 중학개념 + 고1개념

1. 다항식의 연산	2
2. 수	7
3. 도형의 방정식	12
4. 원의 방정식	19
5. 이차함수와 이차방정식 + 이차부등식	21
6. 함수의 그래프 이해하기	37
7. 부등식의 영역	43
8. 삼각비와 원의 성질	44

II 수열의 극한

1. 수열의 극한	51
2. 등비수열의 극한	57
3. 수열의 극한의 다양한 성질	61
4. 급수	63

III 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한의 뜻과 성질	80
2. 함수의 연속의 뜻과 성질	97

IV 다항함수의 미분법

1. 미분계수	106
2. 도함수	109
3. 도함수의 활용	115

V 다항함수의 적분법

1. 부정적분	138
2. 정적분	140
3. 정적분의 활용	151

정답

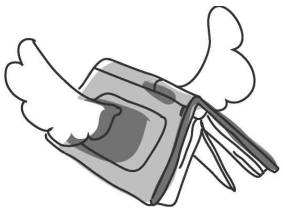


I

미적분 I을 위한 중학개념 + 고1개념

미적분I 개념
그리고 수능유형에 접목되는 중학개념 + 고1개념을 위해서라도
하기 싫지만 은근 슬쩍 넘어갈 수는 없는 것이 있다.
한 장 넘겨보면 바로 알 수 있듯이,
계속해서 반복적으로 니오는 기출문제 속의
중학개념들... 고1개념들.. 그냥 지나칠 수 없다는 것을 알 것이다 -,.-);
후회스러울 수도 있는
중학교 시절... 고등학교 1학년 시절...
하지만,
예전에 놓친 부분들 그리고 예전엔 어려웠던 부분들이
이젠 예전만큼 힘들게 느껴지지 않다는 것!
그만큼 우리는 좀 더 수학적인 내용에 친숙해졌으니
다시 한번 기운내고 개념정리 해보자!

다항식의 연산
수
도형의 방정식
원의 방정식
이차함수와 이차방정식 + 이차부등식
함수의 그래프 이해하기
부등식의 영역
삼각비와 원의 성질



1. 다항식의 연산

미리 알고가기

미적분 I 에서 다루는 함수는 주로 '다항함수'이고, 함수의 극한에서 주로 다루는 함수도 다항함수와 분수함수(다항식/다항식 꼴)로 주어진다. 따라서 미적분I에서 배우게 될 함수를 위해서는 다항식의 연산이 필수적이다.

개념 1 곱셈공식(다항식의 곱셈)

$a(x+y)=$ $\quad$ $a(x-y)=$

$(x+a)^2=$ $\quad$ $(x-a)^2=$

$(x+y)(x-y)=$ $\quad$ $(x+y+z)^2=$

$(x+a)^3=$ $\quad$ $(x-a)^3=$

$(x+a)(x^2-ax+a^2)=$ $\quad$ $(x-a)(x^2+ax+a^2)=$

$(x+a)(x+b)=$ $\quad$ $(ax+c)(bx+d)=$

■ 곱셈공식의 변형

$(a+b)^2=(a-b)^2+$_____ $\quad$ $(a-b)^2=(a+b)^2+$_____

■ 이차식 ⇨ 완전 제곱식으로 바꾸기

$x^2+6x+1=(x^2+6x+3^2-3^2)+1$ $\quad$ $ax^2+bx+c=$

$=(x+3)^2-3^2+1$

$=(x+3)^2-8$

기필코 유형 1 (2012학년도 9월 모의평가 10번)

다음 식 $y=x^2-2x+2$의 우변을 완전제곱식으로 표현하시오.



개념 2 인수분해

$ax+ay=$

$ax-ay=$

$x^2+2ax+a^2=$

$x^2-2ax+a^2=$

$x^2-y^2=$

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=$

$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=$

$x^3+a^3=$

$x^3-a^3=$

$x^2+(a+b)x+ab=$

$abx^2+(ad+bc)x+cd=$

■ 인수정리

다항식 $P(x)$가 $P(a)=0$이면 다항식 $P(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다.

예) $P(x)=x^2-3x+2$

■ 조립제법

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나눌 때, 다항식 $P(x)$의 계수와 a만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6=$_____

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
−2	1	−1	−6	0
		−2	6	
	1	−3	0	

★ 조립제법에서 사용하는 상수 a는 상수항의 약수로만 택하자!

기필코 유형 2 (2013학년도 대수능 21번)

x^3-3x를 인수분해 하시오.

Tip

다항식의 인수분해는
① 공통인수로 먼저 묶는다.
② 인수분해 공식을 우선 적용하고,
③ 인수분해 공식에 해당하지
않으면 인수정리를 이용하여
조립제법으로 인수분해 한다.

Tip

다항식 $P(x)$의 계수의 합이 1이면
$(x-1)$을 인수로 갖는다!

기필코 유형 3 (2014학년도 6월 모의평가 16번)

$3x^2-6x-9$를 인수분해 하시오.

기필코 유형 4 (2013학년도 6월 모의평가 17번)

x^3-3x+2를 인수분해 하시오.





유형 정복

5 (2012학년도 6월 모의평가 5번 / 9번 / 11번 / 15번)

x^2+ax, x^2-2x, x^2-1, a^2-6a를 인수분해 하시오.

6 (2012학년도 9월 모의평가 18번 / 22번)

a^2-3a, x^2-25를 인수분해 하시오.

7 (2013학년도 6월 모의평가 13번)

$3x^2-6x$를 인수분해 하시오.

8 (2014학년도 6월 모의평가 21번)

두 다항식 $a(3x-x^3)$를 인수분해 하시오.

9 (2014학년도 6월 모의평가 9번)

다항식 $\{f(x)\}^2-9$를 인수분해 하시오.

10 (2014학년도 9월 모의평가 3번 / 17번 / 27번)

다항식 x^2-2x, $3x^2-6x$, $a(a-4)+4$를 인수분해 하시오.

11 (2015학년도 6월 모의평가 16번)

다항식 $3x^2-18x+24$를 인수분해 하시오.

12 (2015학년도 대수능 21번)

x^3+ax^2을 인수분해 하시오.

13 (2016학년도 6월 모의평가 17번)

다항식 $6x^2+6x-12$를 인수분해 하시오.

14 (2015학년도 9월 모의평가 21번)

a^2-4a+4를 인수분해 하시오.

15 (2016학년도 6월 모의평가 27번)

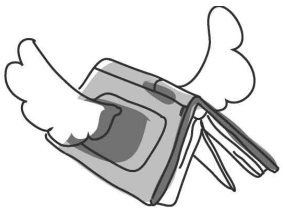
x^2-9를 인수분해 하시오.

16 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

x^3-3x-2를 인수분해 하시오.

참고) 이번 단원의 모든 **'기필코 유형'**은 기출문제에서 일부만 발췌한 문제라 '변형'이라는 글자를 넣지 않았습니다.





2. 수

개념 1 정수

(1) 짝수와 홀수의 표현(2로 나눈 나머지로 자연수 분류하기)

⇨ 짝수 : $2k$(k는 자연수), $2k+2(k=0,1,2,\cdots)$

홀수 : $2k-1$(k는 자연수), $2k+1(k=2,3,4,\cdots)$

(2) 3으로 나눈 나머지로 자연수 분할하기

⇨ $3k, 3k-1, 3k-2$ (k는 자연수)

(3) 약수

⇨ $N=2^p3^q5^r$ (p,q,r이 자연수)일 때, N의 양의 약수의 개수 : _____

⇨ $N=2^p3^q5^r$ (p,q,r이 자연수)일 때, N의 양의 약수의 총합

: _____

(4) 배수의 개수

⇨ 100이하의 자연수에서 n의 배수의 개수: _____

(5) 정수의 개수 세기

⇨ 아래 부등식을 만족하는 정수 x의 개수 (단, a,b가 자연수)

① $a \le x \le b$: $b-a+1$개

② $a < x \le b$: $b-a$개

③ $a \le x < b$: $b-a$개

④ $a < x < b$: $b-a-1$개

⇨ a,b가 음의 정수이면?

① $-7 \le x \le -3$:

② $-7 < x \le -3$:

③ $-7 \le x < -3$:

④ $-7 < x < -3$:

⇨ a는 음의 정수, b는 양의 정수이면?

⑤ $-7 \le x \le 3$:

⑥ $-7 < x \le 3$:

⑦ $-7 \le x < 3$:

⑧ $-7 < x < 3$:



유형 정복

17 (2016학년도 6월 모의평가 17번)

부등식 $-7 < a < 0$을 만족하는 모든 정수 a의 개수는?

18 (2016학년도 6월 모의평가 21번)

$\frac{32n^3}{27}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

19 (2015학년도 6월 모의평가 23번)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, n이 홀수이면 $a_{n+1} = a_n$, n이 짝수이면 $a_{n+1} = (a_n - 3)^2$이다. a_{2015}의 값을 구하시오.

20 (2015학년도 9월 모의평가 12번)

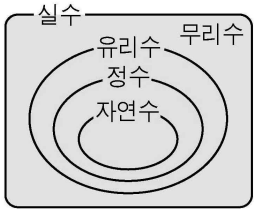
자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 구하시오.

21 (2013학년도 6월 모의평가 18번)

수열 $\{a_n\}$은 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 0$일 때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$의 0이 아닌 항들로만 구성한 수열의 첫째항과 공비를 구하시오.



개념 2 실수



(1) a의 제곱근$(a \geq 0)$

⇨ 음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수 x

: 방정식 $x^2 = a$의 해 $\Leftrightarrow$ $x = \pm\sqrt{a}$

(2) 제곱근의 계산

⇨ $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

(3) 분모의 유리화

⇨ 무리수(무리식)인 분모를 유리수(유리식)로 고치는 것

예) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} =$ _____

$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$ _____

(4) 실수의 대소(大小)관계

⇨ $0 < a < b$이면 ① $-a > -b$

② $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

③ $-\dfrac{1}{a} < -\dfrac{1}{b}$

예) $0 < 2 < 3$이므로 ① -2 ____ -3

② $\dfrac{1}{2}$ ____ $\dfrac{1}{3}$

③ $-\dfrac{1}{2}$ ____ $-\dfrac{1}{3}$

(5) 절댓값

⇨ 점 $\mathrm{P}(a)$가 원점으로부터 떨어진 거리 : $|a|$

① $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} = \sqrt{a^2}$

② $|a| = |-a|$, $|a-b| = |b-a|$

③ $|a|^2 = a^2 = (\sqrt{a})^2$

④ $|x| = a(a > 0) \Leftrightarrow x = \pm a$

⑤ $|x| = |y| \Leftrightarrow$

⑥ $|x| < a(a > 0) \Leftrightarrow$

$|x| > a(a > 0) \Leftrightarrow$



유형 정복

22 (2013학년도 9월 모의평가 21번)

네 실수 $-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}$을 수직선 위에 표현하시오.

23 (2013학년도 대수능 14번)

두 수 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}-5}$를 유리화 하시오.

24 (2014학년도 9월 모의평가 22번)

$\sqrt{n^2+28n}-n$의 분자를 유리식으로 표현하시오.

25 (2014학년도 9월 모의평가 25번)

$\sqrt{x^2+a}-2$의 분자를 유리식으로 표현하시오.

26 (2016학년도 6월 모의평가 14번)

자연수 n에 대하여 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$의 분자를 유리식으로 표현하시오.

27 (2013학년도 6월 모의평가 20번)

$|x-1|$을 x의 범위에 따라 절댓값 없이 표현하시오.





유형 정복

28 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

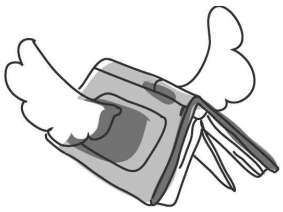
$\left|-\frac{1}{3}t^3+t-\frac{41}{3}\right|$을 최고차항이 양수인 삼차식과 절댓값을 이용하여 표현하시오.

29 (2013학년도 대수능 20번)

$|x|\geq 1$, $|x|<1$을 수직선 위에 표시하시오.

30 (2016학년도 6월 모의평가 14번)

자연수 n에 대하여 집합 $\{\alpha,\beta\}=\{3+\sqrt{n},3-\sqrt{n}\}$에서 $|\alpha-\beta|$를 구하시오.



3. 도형의 방정식

개념 1 두 점 사이의 거리, 중점

(1) 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$의 중점 M의 좌표

⇨ $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$의 중점 M의 좌표

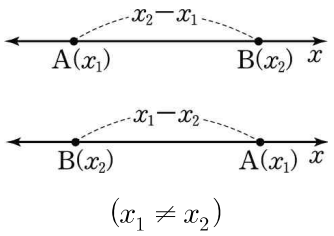
⇨ $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(3) 수직선 위 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$

⇨ $\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|=$**큰 값 - 작은 값** >0

: $x_1<x_2$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=$

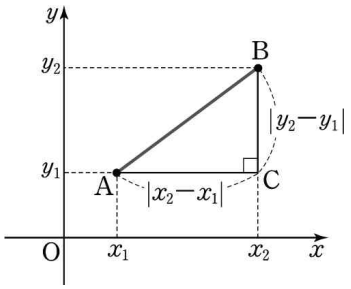
$x_1>x_2$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=$



$(x_1\neq x_2)$

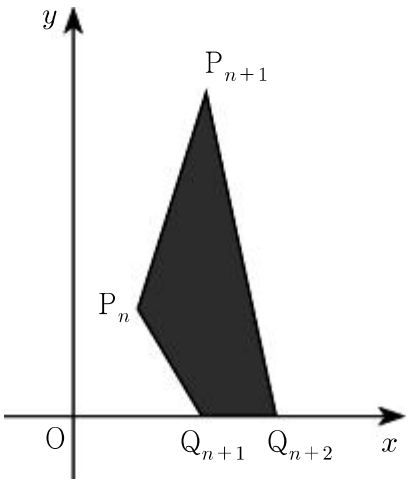
(4) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리

: $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



기필코 유형 31 (2012학년도 대수능 28번)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(n, 3^n)$, 점 Q_n의 좌표를 $(n, 0)$이라 할 때, 사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 n에 관한 식으로 나타내시오.







유형 정복

32 (2016학년도 9월 모의평가 12번)

두 점 $\mathrm{P}(x, \log x)$와 $\mathrm{Q}(x, 0)$의 중점의 좌표를 구하시오.

33 (2013학년도 6월 모의평가 17번)

두 점 $\mathrm{A}(1, -4)$와 $\mathrm{B}(-2, 2)$에 대하여 선분 AB의 길이는?

34 (2015학년도 9월 모의평가 28번)

점 $(3n, 4n)$과 점 $(0, -1)$사이의 거리를 구하시오.

35 (2012학년도 대수능 12번)

세 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{P}(t, t+1)$, $\mathrm{Q}(0, 2t+1)$에 대하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$을 구하시오.

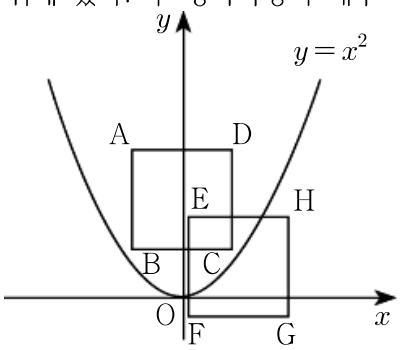
36 (2014학년도 대수능 21번)

점 $\mathrm{P}(0, -2t^3)$에서 원점까지의 거리를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$를 구하시오.

37 (2012학년도 6월 모의평가 21번)



한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점 (t, t^2)은 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이 $f(t)$를 구하시오.



개념 2 직선의 방정식

(1) x축에 평행한 직선이 점 (a, b)를 지나는 경우 :

⇨

(2) y축에 평행한 직선이 점 (a, b)를 지나는 경우 :

⇨

(3) x절편 : 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표

⇨ $y=f(x)$에 $y=0$을 대입하여 얻은 x의 값

y절편 : 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표

⇨

(4) 기울기 m과 y절편 n이 주어진 경우 :

⇨

(5) 기울기 m과 한 점 (x_1, y_1)이 주어진 경우 :

⇨

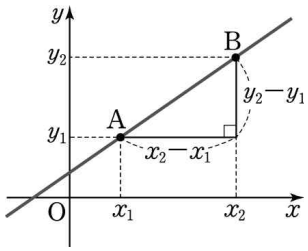


(6) 두 점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)를 지나는 경우

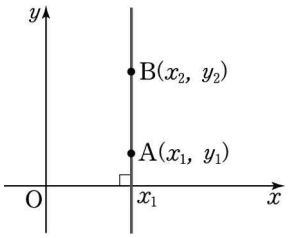
⇨ (i) $x_1 \neq x_2$일 때,

$y_1 \neq y_2$이면 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y_1 = y_2$이면 $y = y_1$



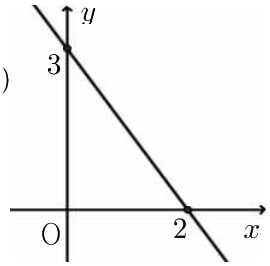
(ii) $x_1 = x_2$일 때, $x = x_1$



(7) x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식

⇨ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

(예)



$\Rightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

(8) 직선 $y = mx + n$에 평행인 직선이 점 (x_1, y_1)을 지나는 경우

⇨

(9) 직선 $y = mx + n$에 수직인 직선이 점 (x_1, y_1)을 지나는 경우

⇨

(10) 일차방정식 $ax + by + c = 0$의 그래프 그리기

⇨ $y = mx + n$꼴로 고쳐서 기울기 m과 y절편 n을 이용하여 그린다.



유형 정복

38 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

직선 $x=k$, $y=2x+2$를 그리시오.

39 (2012학년도 대수능 21번)

직선 $y=2$를 그리시오.

40 (2014학년도 대수능 8번)

직선 $y=3$을 그리시오.

41 (2016학년도 6월 모의평가 17번)

직선 $y=a$를 그리시오.

42 (2014학년도 대수능 21번)

직선 $y=(3t^2+1)(x-t)+t^3+t$가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.

43 (2012학년도 6월 모의평가 27번)

기울기가 1인 직선이 점 $(0, 12)$를 지날 때, 이 직선의 방정식을 구하시오.

44 (2012학년도 9월 모의평가 15번)

직선 $y=3x-4$가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, a의 값은?

45 (2016학년도 6월 모의평가 13번)

기울기가 1이고 y절편이 -5인 직선의 x절편은?



46 (2013학년도 대수능 15번)

직선 $y=2x+b$가 점 $(1,8)$을 지날 때, b의 값과 직선의 기울기를 구하시오.

47 (2014학년도 6월 모의평가 17번)

기울기가 10인 직선이 점 $(-1,\ -4)$를 지날 때, 이 직선의 방정식을 구하시오.

48 (2015학년도 대수능 14번)

직선 $y=5x+k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, k의 값을 구하시오.

49 (2015학년도 6월 모의평가 27번)

기울기가 -1이고, 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선이 점 $(-10,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

50 (2012학년도 대수능 12번)

점 $(t,\ t+1)$를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.

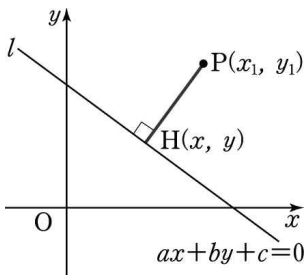
51 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

직선 $x-y-10=0$을 그리시오.

개념 3 점과 직선 사이의 거리

(1) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 $d=\overline{\mathrm{PH}}$는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(2) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $x=a$ 사이의 거리 $d=|x_1-a|$

(3) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $y=b$ 사이의 거리 $d=|y_1-b|$

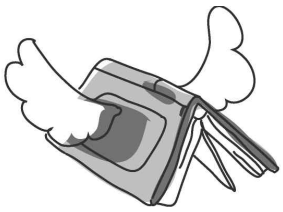
기필코 유형 52 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

점 $\left(t,\ \frac{1}{3}t^3+\frac{11}{3}\right)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 구하시오.

기필코 유형 53 (2012학년도 대수능 28번)

자연수 n에 대하여 직선 $x=n+1$과 점 $(n,\ 3^n)$ 사이의 거리를 구하시오.



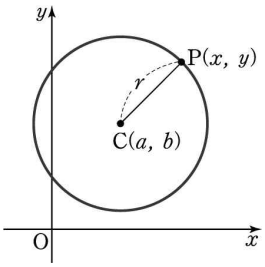


4. 원의 방정식

개념 1 원의 방정식

(1) 중심이 $(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식

: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



(2) 중심이 $(a,\ b)$인 원이 x축에 접하는 경우

:

(3) 중심이 $(a,\ b)$인 원이 y축에 접하는 경우

:

(4) 중심이 $(a,\ b)$인 원이 x축과 y축에 동시에 접하는 경우

:

(5) 원의 방정식의 일반형

: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$(단, $A,\ B,\ C$는 상수) <--세 점이 주어진 경우 사용



유형 정복

54 (2012학년도 6월 모의평가 14번)

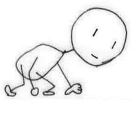
중심이 (a_n, b_n)이고 y축에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

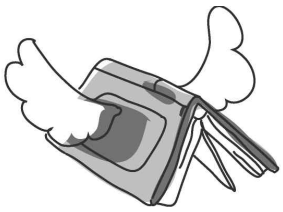
55 (2015학년도 9월 모의평가 28번)

자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0, -1)$사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.

56 (2013학년도 9월 모의평가 29번)

세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.





5. 이차함수와 이차방정식 + 이차부등식

개념 1 이차함수의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$의 그래프 그리기

(1) $y=a(x-p)^2+q$꼴 이용

⇨ ① 꼭짓점이 $(p,\,q)$이다.

② $a>0$이면 아래 볼록, $a<0$이면 위로 볼록

(2) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$꼴 이용

⇨ ① x절편이 α,β이므로 두 개의 점 $(\alpha,0),(\beta,0)$을 지난다.

② $a>0$이면 아래 볼록, $a<0$이면 위로 볼록

(3) 이차함수의 성질

⇨ ① $y=a(x-p)^2+q$이면 직선 $x=p$에 대칭이다.

② $|a|$가 커질수록 포물선의 폭이 좁아진다.



유형 정복

57 (2014학년도 9월 모의평가 13번 / 29번)

이차함수 $y=x^2$과 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 그리시오.

58 (2016학년도 6월 모의평가 13번)

이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프를 그리시오.

59 (2014학년도 대수능 8번)

이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프를 그리시오.

60 (2012학년도 9월 모의평가 10번)

곡선 $y=x^2-x+2$의 그래프를 그리시오.

61 (2016학년도 9월 모의평가 20번)

이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프를 그리시오.

62 (2016학년도 9월 모의평가 13번)

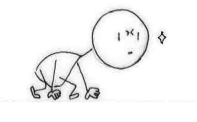
이차함수 $y=x^2-1$의 그래프를 그리시오.

63 (2012학년도 대수능 28번)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고 $(2,-1)$을 지날 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

64 (2012학년도 대수능 19번)

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고, y축에 대칭이 될 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. (단, $a\neq 0$인 상수)



개념 2 이차방정식의 풀이

방법1) 인수분해하여 해를 구한다.

: $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\,(a\neq 0) \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

방법2) 완전제곱식인 경우는 제곱근의 정의로 구한다.

: $(x-p)^2=q(q\geq 0) \Leftrightarrow x-p=\pm\sqrt{q} \Leftrightarrow x=p\pm\sqrt{q}$

방법3) 근의 공식

- $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$의 해 : $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $ax^2+2b'x+c=0(a\neq 0)$의 해 : $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$

기필코 유형 65 (2016학년도 6월 모의평가 17번)

방정식 $6x^2+6x-12=0$의 해를 구하시오.

기필코 유형 66 (2013학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $18x^2-1=1$의 해를 구하시오.

기필코 유형 67 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $x^2-2x-2=0$의 해를 구하시오.

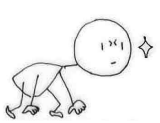
개념 3 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식

$D=b^2-4ac$ 를 이용하여 이차방정식의 해의 개수를 판별할 수 있다.

① $D>0$: 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0$: 한 개의 실근(중근)을 갖는다.
③ $D<0$: 실근을 갖지 않는다.(두 허근을 갖는다.)

기필코 유형 68 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $x^2-2x+4=0$이 실근을 갖는지 답하시오.





유형 정복

69 (2012학년도 6월 모의평가 21번)

방정식 $-3t^2+2t=0$의 해를 구하시오.

70 (2012학년도 9월 모의평가 20번)

방정식 $(a+2)^2=a^2$의 해를 구하시오.

71 (2013학년도 6월 모의평가 13번)

방정식 $3x^2-6x=0$의 해를 구하시오.

72 (2014학년도 6월 모의평가 17번)

방정식 $3x^2-6x-9=0$의 해를 구하시오.

73 (2015학년도 6월 모의평가 16번)

방정식 $3x^2-18x+24=0$의 해를 구하시오.

74 (2014학년도 9월 모의평가 27번)

방정식 $a(a-4)=-4$의 해를 구하시오.

75 (2015학년도 6월 모의평가 14번)

방정식 $-t^2+4t=0$의 해를 구하시오.

개념 4 이차방정식 관련 꿀 팁

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 해가 α, β이면

⇨ $ax^2+bx+c=0 \iff a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

(2) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 해가 3이면

⇨ ① $x=3$를 대입해도 식이 성립 $\Rightarrow a\times 3^2+b\times 3+c=0$

② 다른 한 해를 β라 두면 $ax^2+bx+c=0 \iff a(x-3)(x-\beta)=0$

(즉, ax^2+bx+c가 $(x-3)$을 인수로 갖는다.)

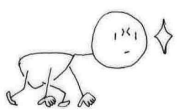
(3) 근과 계수의 관계

⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 해가 $\alpha, \beta \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

(왜?)

기필코 유형 76 (2016학년도 6월 모의평가 21번)

자연수 n에 대하여 방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 해가 $\pm n$일 때, a, b를 n으로 나타내시오.





유형 정복

77 (2012학년도 6월 모의평가 22번)

이차방정식 $x^2+ax+1=0$의 한 해가 1일 때, 상수 a를 구하고, x^2+ax+1을 인수분해 하시오.

78 (2013학년도 6월 모의평가 5번)

이차방정식 $x^2+ax=0$의 한 해가 $x=1$일 때, 상수 a를 구하시오.

79 (2013학년도 9월 모의평가 19번)

이차방정식 $3at^2-8at+(4a-1)=0$의 한 해가 $\frac{1}{2}$일 때, 상수 a를 구하시오.

80 (2013학년도 대수능 28번)

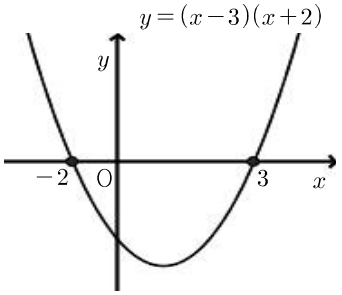
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0, f(2)=0$을 만족할 때, $f(x)$를 구하시오.

81 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

이차방정식 $t^2-2t-2=0$을 만족하는 모든 실수 t의 합은?

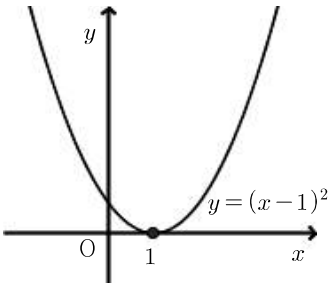
개념 5 이차함수와 이차방정식의 관계

⇨ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.



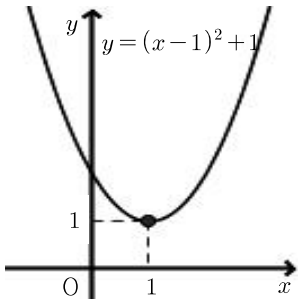
① 이차방정식 $(x-3)(x+2)=0$의 해
$\Leftrightarrow x=3$ 또는 $x=-2$ (서로 다른 두 실근 $\Leftrightarrow D>0$)

② 이차함수 $y=(x-3)(x+2)$의 그래프와
x축의 교점의 좌표 $\Leftrightarrow$ $x=3$ 또는 $x=-2$



① 이차방정식 $(x-1)^2=0$의 해
$\Leftrightarrow x=1$ (중근 $\Leftrightarrow D=0$)

② 이차함수 $y=(x-1)^2$의 그래프와
x축의 교점의 좌표 $\Leftrightarrow x=1$



① 이차방정식 $(x-1)^2+1=0$의 해
$\Leftrightarrow$ 없다 $(D<0)$

② 이차함수 $y=(x-1)^2+1$의 그래프와 x축의 교점의 좌표
$\Leftrightarrow$ 없다(이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않는다)

개념 6 이차함수와 직선의 위치 관계

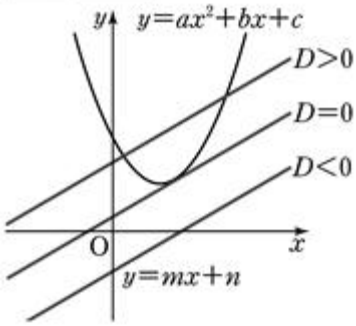
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는
이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때

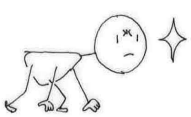
① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$이면 만나지 않는다.

$a>0,\ m>0$





개념 7 방정식과 함수의 그래프 사이의 관계

(1) 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 해의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수이다.

기필코 유형 82 (2016학년도 9월 모의평가 20번)

자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프가 만나는 두 교점의 x좌표를 구하여라.

기필코 유형 83 (2016학년도 6월 모의평가 17번)

두 함수 $f(x)=x^2-3x$, $g(x)=-x^2+x+a$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 실근을 갖도록 하는 a의 범위는?



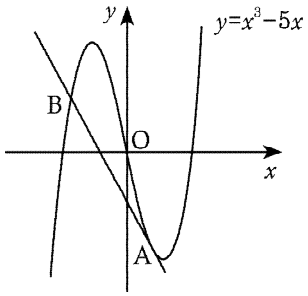
유형 정복

84 (2012학년도 6월 모의평가 28번)

자연수 n에 대하여 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표 (a_n, b_n)을 구하시오.

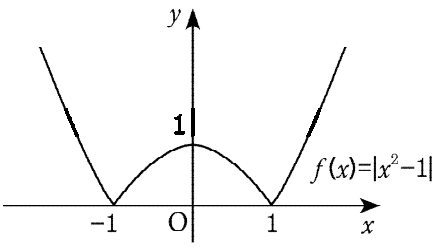
85 (2013학년도 6월 모의평가 17번)

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 A에서의 접선 $y=-2x-2$가 점 A가 아닌 점 B에서 만난다. 선분 AB의 길이는?



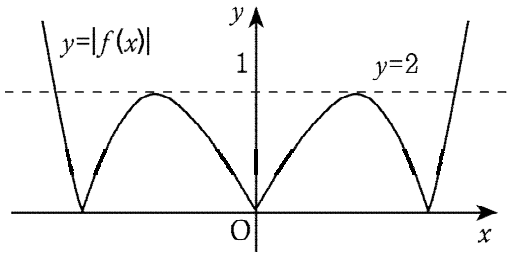
86 (2012학년도 6월 모의평가 18번)

두 직선 $y=\frac{1}{2}$과 $y=1$이 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 각각 구하시오.



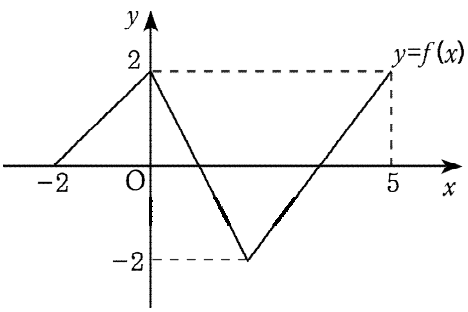
87 (2012학년도 대수능 21번)

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대해 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.



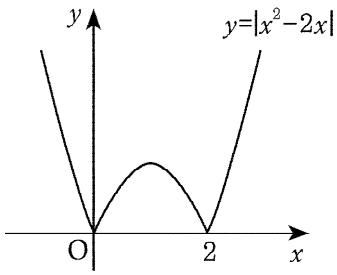
88 (2013학년도 6월 모의평가 20번)

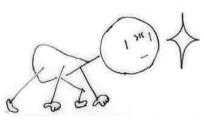
$-2 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대해 방정식 $f(x)=-1$의 해의 개수를 구하시오.



89 (2016학년도 6월 모의평가 29번)

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수가 4개가 되도록 하는 t의 범위를 구하시오.





개념 8 삼차방정식과 사차방정식의 해

⇨ 인수정리와 조립제법, 인수분해 공식을 이용하여 인수분해하여 근을 구한다.

기필코 유형 90 (2013학년도 6월 모의평가 17번)

삼차방정식 $x^3-5x=-2x-2$의 실근을 모두 구하시오.

기필코 유형 91 (2012학년도 9월 모의평가 15번)

삼차방정식 $-3t^3+t^3-2=-4$의 실근을 모두 구하시오.



유형 정복

92 (2012학년도 대수능 21번)

삼차방정식 $x^3+ax=0$의 해를 구하시오.
(단, $a<0$인 상수)

93 (2013학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $6x^3-x=0$의 해를 구하시오.

94 (2013학년도 대수능 21번)

삼차방정식 $x^3-3x=0$의 해를 구하시오.

95 (2014학년도 9월 모의평가 27번)

방정식 $x^3+2x+7=5x+9$의 해를 구하시오.

96 (2015학년도 대수능 11번)

방정식 $x(x+1)(x-4)=0$의 해를 구하시오.

97 (2016학년도 9월 모의평가 14번)

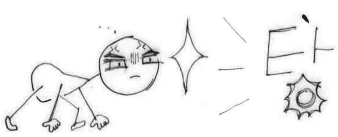
방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=0$의 해를 구하시오.

98 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $4t^3-12t^2+8=0$의 해를 구하시오.

99 (2016학년도 9월 모의평가 21번)

방정식 $t^4-4t^3+8t-32=0$의 실근을 모두 구하시오.



개념 9 이차부등식의 풀이

(1) 인수분해가 되는 경우 ($\alpha < \beta$인 경우)

⇨ ① $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$ 또는 $x \geq \beta$

② $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$

⇨ 이 외의 경우는 이차함수의 그래프를 활용하여 해를 구하는 것이 편리하다.

기필코 유형 100 (2013학년도 6월 모의평가 10번)

부등식 $4(t-\frac{1}{2})\times 2(t-4) < 0$을 만족하는 실수 t의 범위를 구하시오.

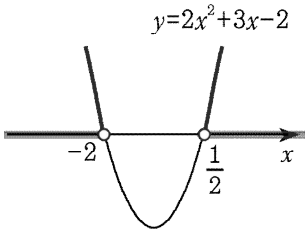
개념 10 이차함수와 이차부등식의 관계

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축 위에 놓이는 x좌표가 이차방정식 $ax^2+bx+c>0$의 실근이다.

예) (1) $2x^2+3x-2>0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2)>0$

$\Leftrightarrow x<-2, \frac{1}{2}<x$

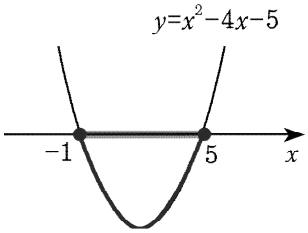


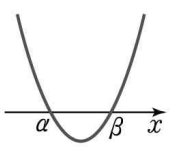
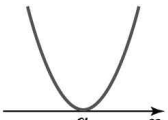
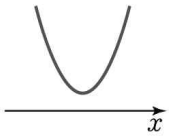
(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축 아래 놓이는 x좌표가 이차방정식 $ax^2+bx+c<0$의 실근이다.

예) $x^2-4x-5<0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\Leftrightarrow -1<x<5$



	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근	서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$	중근 α	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$의 해			
$ax^2+bx+c\geq0$ $(a>0)$의 해			
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$의 해			
$ax^2+bx+c\leq0$ $(a>0)$의 해			

☀보기 (1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 모든 실수가 되는 조건

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$의 해가 모든 실수가 되는 조건





유형 정복

101 (2016학년도 6월 모의평가 27번)

$-a \le x \le a$인 x가 부등식 $x^2-9 \le 0$을 만족하도록 하는 양수 a의 최댓값을 구하시오.

102 (2012학년도 6월 모의평가 15번)

부등식 $3x^2+2ax+2a \ge 0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 a의 범위를 구하시오.

103 (2012학년도 9월 모의평가 18번)

부등식 $x^2-2ax+3a \ge 0$의 해가 모든 실수가 되는 상수 a의 범위를 구하시오.

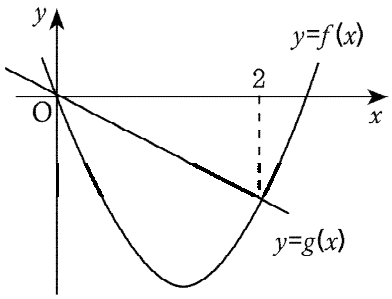
개념 11 부등식과 함수의 그래프 사이의 관계

(1) 부등식 $f(x) > g(x)$의 해는
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 놓이는 x좌표이다.

(2) 부등식 $f(x) \leq g(x)$의 해는
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프 아래 또는 교점의 x좌표이다.

기필코 유형 104 (2012학년도 6월 모의평가 19번)

이차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$에 대해 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 다음을 구하시오.

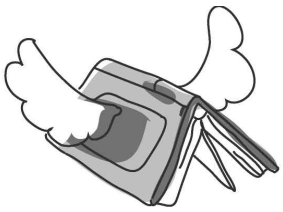


(1) $h(x) > 0$인 x의 범위

(2) $h(x)=0$인 모든 x의 값

(3) $h(x) < 0$인 x의 범위



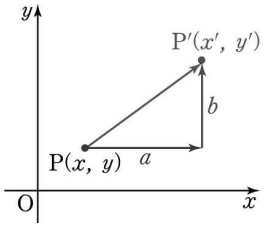


6. 함수의 그래프 이해하기

개념 1 평행이동

(1) 점의 평행이동

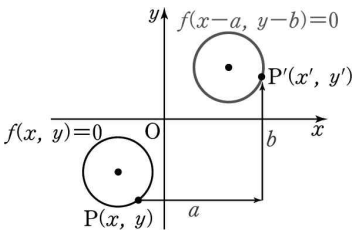
⇨ 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼,
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$



(2) 도형의 평행이동

⇨ 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로
a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식

⇨ $f(x-a,\ y-b)=0$



예) $y=x^2$의 그래프를

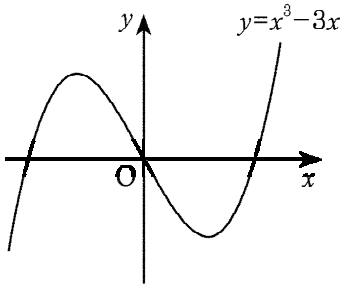
① x축 방향으로 a만큼 평행이동하면 _____의 그래프이다.

② y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 _____의 그래프이다.

③ x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 _____의 그래프이다.

기필코 유형 105 (2013학년도 대수능 21번)

함수 $y=x^3-3x$의 그래프가 그림과 같을 때, $y=x^3-3x+2$의 그래프를 그리시오.

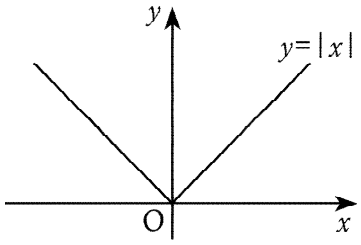




유형 정복

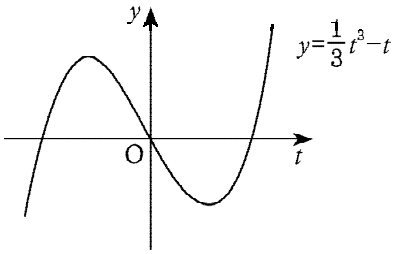
106 (2013학년도 9월 모의평가 21번)

함수 $y=|x|$의 그래프가 그림과 같을 때, $y=|x-a|$의 그래프를 그리시오.



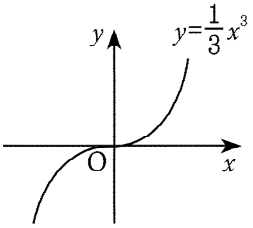
107 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

삼차함수 $y=\frac{1}{3}t^3-t$의 그래프를 이용하여 함수 $g(t)=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{41}{3}$의 그래프를 그려라.



108 (2015학년도 9월 모의평가 27번)

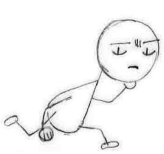
함수 $y=\frac{1}{3}x^3$의 그래프가 그림과 같을 때, $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}(x>0)$의 그래프를 그리시오.



109 (2012학년도 9월 모의평가 20번)

함수 $f(x)=x^2-x-1$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$이라 하자.

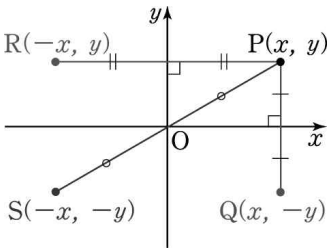
함수 $g(x)$의 그래프를 그리시오.



개념 2 대칭이동

(1) 점의 대칭이동

$P(x, y)$를 ① x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표
:
② y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표
:
③ 원점 O에 대하여 대칭이동한 점의 좌표
:



(2) 도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

① x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

② y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

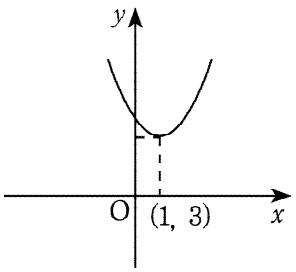
③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

☀보기 $y=2(x-1)^2+3$인 함수의 그래프를

① x축 대칭이동한 도형의 방정식은 _____

② y축 대칭이동한 도형의 방정식은 _____

③ 원점 대칭이동한 도형의 방정식은 _____



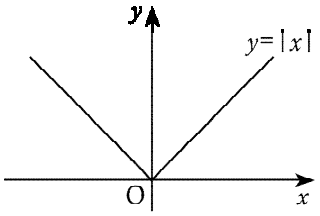
개념 3 대칭인 함수의 그래프

정의역의 모든 실수 x에 대해 함수 $f(x)$가

(1) $f(-x)=f(x)$를 만족하는 경우 ⇨ 함수의 그래프가 y축 대칭이 된다.

(예) 짝수차 항으로만 이루어진 다항함수

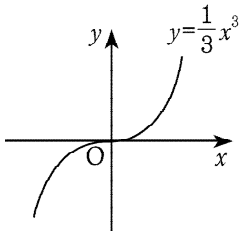
: $y=5x^2$, $y=x^4-3x^2+1$, $y=k|x|$



(2) $f(-x)=-f(x)$를 만족하는 경우 ⇨ 함수의 그래프가 원점 대칭이 된다.

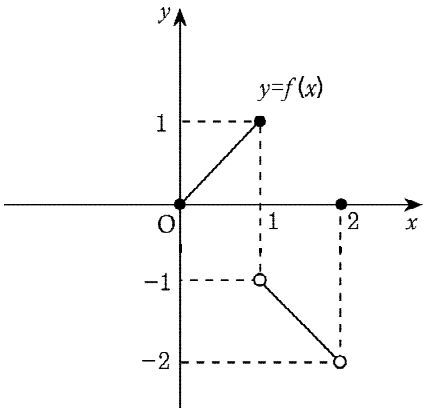
(예) 홀수차 항으로만 이루어진 다항함수

: $y=5x$, $y=3x^5-x^3+2x$



기필코 유형 110 (2014학년도 9월 모의평가 15번)

정의역이 $\{x|-2\le x\le 2\}$인 함수 $f(x)$의 그래프가 $0\le x\le 2$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대해서 $f(-x)=-f(x)$이다. $-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 그리시오.



기필코 유형 111 (2012학년도 대수능 21번)

함수 $f(x)$가 $x\ge 0$에서 $f(x)=8x(x-1)$이고, 모든 실수 x에 대해서 $f(-x)=-f(x)$이다. 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 함수 $y=2$의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.



개념 4 절댓값을 포함한 함수의 그래프 그리기

(1) $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

(2) 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 뒤, x축 아래 놓인 부분을 x축에 대칭하여 그린다.

기필코 유형 112 (2012학년도 6월 모의평가 18번)

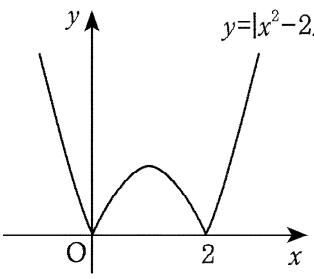
함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 4개가 되는 실수 t의 범위를 구하시오.



기필코! 유형 정복

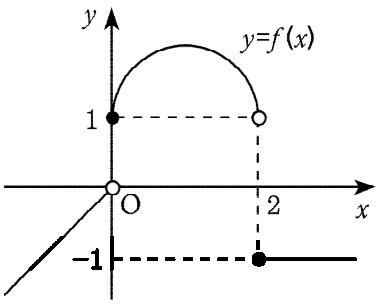
113 (2016학년도 6월 모의평가 29번)

함수 $y=|x^2-2x|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 3개일 때, t의 값을 구하시오.



114 (2014학년도 6월 모의평가 11번)

함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리시오.



개념 5 알고 있는 그래프에서 새로운 그래프 만들기

(1) $y=a\times f(x)(a>0)$의 그래프

(2) $y=a\times f(x)(a<0)$의 그래프

(3) $y=f(x)+g(x)$의 그래프

(4) $y=f(x)-g(x)$

개념 6 주기함수

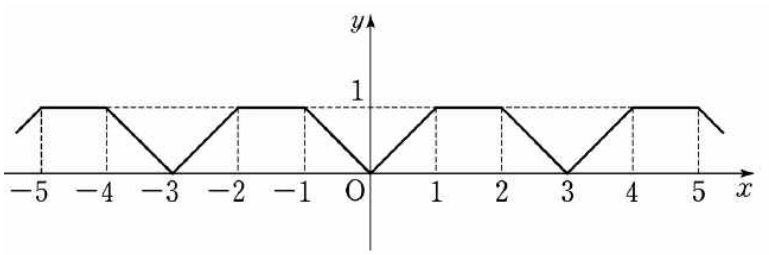
함수 $f(x)$가 정의역의 모든 실수 x에 대해 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p가 존재할 때,
① p를 함수 $f(x)$의 '주기'라고 한다.
② 함수 $f(x)$는 주기함수이다.
③ 함수의 그래프는 p간격으로 반복된다.

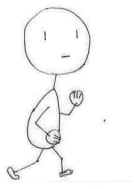
기필코 유형 115 (2015학년도 대수능 20번)

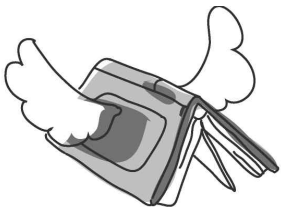
함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<2) \\ -x+3 & (2\le x<3) \end{cases}$$ 이다.

$-6\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.





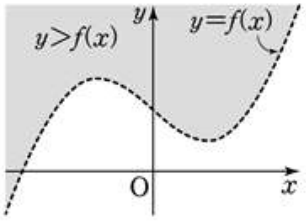


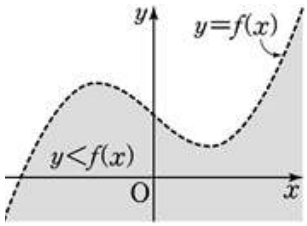
7. 부등식의 영역

개념 1 부등식의 영역

(1) 부등식 $y>f(x)$의 영역은 곡선 $y=f(x)$의 윗부분이다.

(2) 부등식 $y<f(x)$의 영역은 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분이다.





(단, 경계선 제외)

(3) 부등호가 $\geq$, $\leq$이면 부등식의 영역에 경계선이 포함된다.

(4) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 경계로 나뉜 한 영역이 부등식의 영역이 되는지 확인하기 위해서는 그 영역의 특정한 한 점 (a,b)를 대입하여 부등식을 만족하는지 확인한다.

기출필수코드! 유형 정복



116 (2013학년도 9월 모의평가 29번)

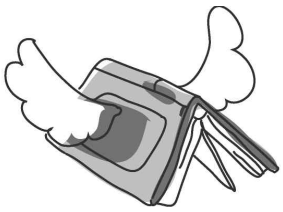
부등식 $y \leq x^2$의 영역을 좌표평면에 나타내시오.

117 (2014학년도 9월 모의평가 14번)

네 점 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4^2)$, $C(0,4^2)$이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직사각형 $OABC$ 또는 그 내부에 있고 부등식 $y \geq x^2$을 만족시키는 모든 점의 개수를 구하시오.

118 (2012학년도 6월 모의평가 14번)

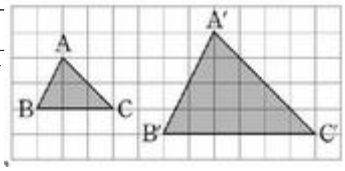
연립부등식 $\begin{cases} y \leq 1 \\ 2x+y-2 \leq 0 \end{cases}$의 영역을 좌표평면에 나타내시오.



8. 삼각비와 원의 성질

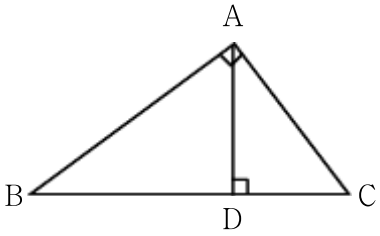
개념 1 도형의 닮음과 그 활용

⇨ 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 얻은 도형이 다른 도형과 합동이 될 때, 이들 두 도형은 [닮음]의 관계에 있다 또는 서로 닮았다고 한다.

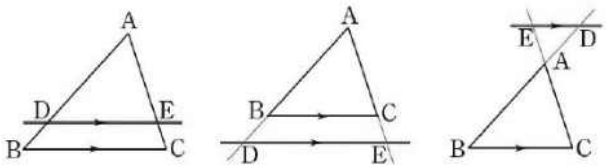


(1) 닮은 두 도형은
① 대응하는 변의 길이의 비가 모두 일정하다.
② 대응하는 각의 크기가 서로 같다.

(2) 직각삼각형의 닮음 : $\overline{BA}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$



(3) 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비
⇨ $\triangle ABC$에서 변 BC에 평행한 직선을 그어 두 변 AB, AC 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 하면 다음이 성립한다.



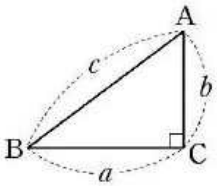
① $\overline{BC} // \overline{DE}$이면 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$
② $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

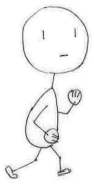
(4) 닮은 도형의 넓이의 비
⇨ 닮음비가 $m : n$이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$이다.

개념 2 피타고라스의 정리

(1) $\triangle ABC$에서 $\angle C$가 직각이면 $a^2 + b^2 = c^2$이다.

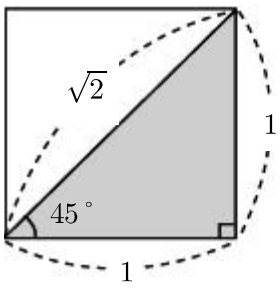
(2) $\triangle ABC$에서 $a^2 + b^2 = c^2$이면
길이가 c인 변을 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

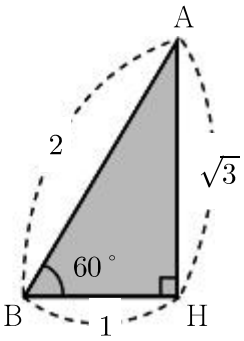




개념 3 피타고라스 정리의 활용

(1) 직각이등변 삼각형(한 내각의 크기가 45°)의
세 변의 길이의 비
⇨ $1:1:\sqrt{2}$

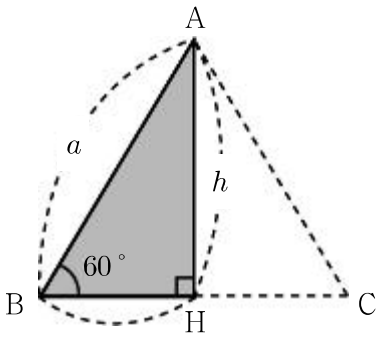




(2) 한 내각의 크기가 60°인 직각삼각형의
세 변의 길이의 비
⇨ _____

(3) 한 내각의 크기가 30°인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비 ⇨ _____

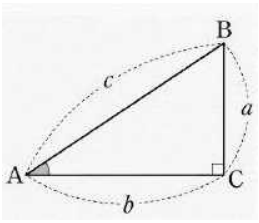
(4) 정삼각형의 넓이
: 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이를 S라고 하면 $S=$ _____



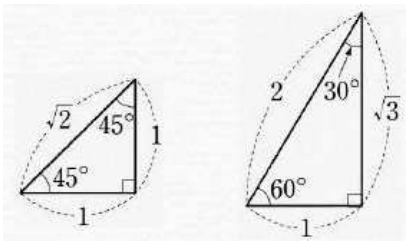
개념 4 삼각비

(1) 삼각비 : $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서

① $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{a}{c}$ ② $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{b}{c}$ ③ $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{a}{b}$

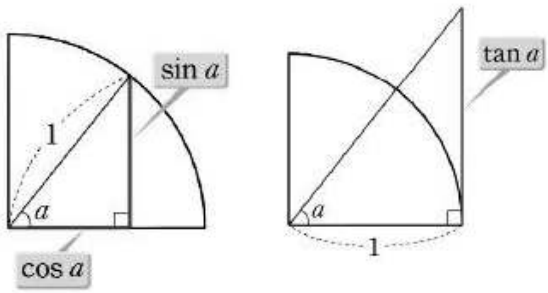


(2) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 의 삼각비의 값



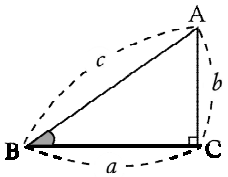
삼각비 \ A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

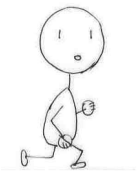
(3) $\sin 0^\circ=0$, $\sin 90^\circ=1$,
$\cos 0^\circ=1$, $\cos 90^\circ=0$, $\tan 0^\circ=0$



개념 5 삼각비의 활용

빗변의 길이 c와 $\angle B$가 주어지면 ① $a=c\times\cos B$
② $b=c\times\sin B$





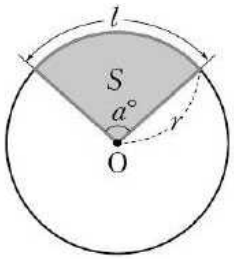
개념 6 원과 원의 성질

(1) 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2이고, 원주(원의 둘레 길이)는 $2\pi r$이다.

(2) 부채꼴의 성질

① 한 원에서 부채꼴의 호의 길이 l은 중심각의 크기 α°에 정비례한다.

② 한 원에서 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 α°에 정비례한다.



(3) 부채꼴의 넓이

: 반지름이 r인 원의 중심각의 크기가 α°인 부채꼴에 대해

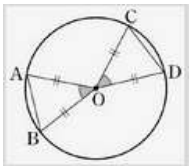
① 호의 길이 $l=2\pi r\times\dfrac{\alpha}{360}$

② 넓이 $S=\pi r^2\times\dfrac{\alpha}{360}$, $S=\dfrac{1}{2}rl$

(4) 중심각과 현

① 크기가 같은 두 중심각에 대한 현의 길이는 같다.

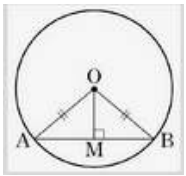
② 길이가 같은 두 현에 대한 중심각의 크기는 같다.



(5) 현의 수직이등분선

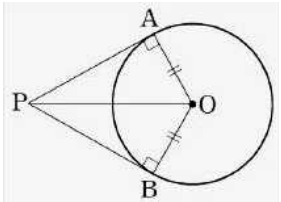
① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분 한다.

② 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



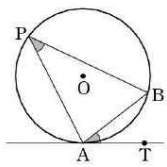
(6) 접선의 성질

: $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$



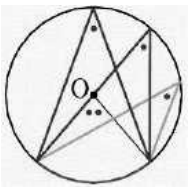
(7) 접선과 현이 이루는 각의 크기

: $\angle \mathrm{BAT}=\angle \mathrm{APB}$



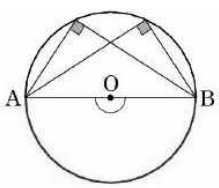
(8) 원주각과 중심각의 크기

: 원에서 한 호에 대한 모든 원주각의 크기는 일정하고 그 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이다.



(9) ① 원에 내접하는 삼각형의 한 변이 지름이면 지름의 대각이 직각이 된다.

② 원에 내접하는 직각삼각형의 빗변은 원의 지름이다.

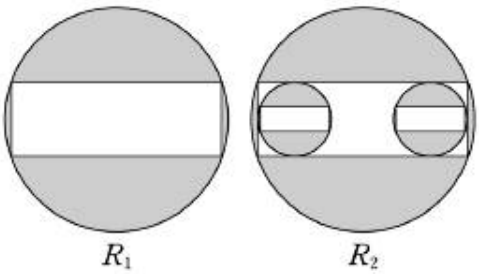




유형 정복

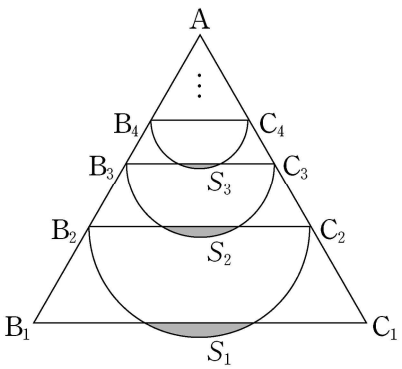
119 (2012학년도 대수능 14번)

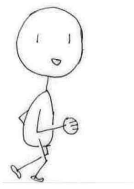
반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3 : 1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. R_2에 색칠된 도형의 넓이의 합을 구하시오.



120 (2013학년도 6월 모의평가 12번)

한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 AC_1을 2 : 1로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자. 정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고 선분 B_3C_3를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1과 S_2를 각각 구하시오.





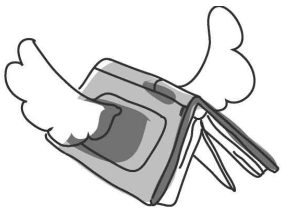
II 수열의 극한

수열의 극한
등비수열의 극한
수열의 극한의 다양한 성질
급수

수열의 극한을 공부하기 위해서는 함수의 그래프와 연결지어 생각해보아야 하는 첫 번째 관점과 수렴하는 수열의 성질을 이용하여 식을 조작하면서 극한을 생각해야하는 두 번째 관점 모두 필요하다. 첫 번째 관점은 수열의 극한의 도입에서 필요한 개념이지만, 극한 전반에서 직관을 얻기 위해 필요하며, 두 번째 관점은 수열을 모두 그래프를 그려 생각할 수 없으니, 대수적인 조작을 통해 극한값을 계산하기 위해 필요하며 대부분의 기출문제가 두 번째 관점을 바탕으로 출제가 되고 있다. 대부분의 유형들이 기존의 기출문제와 비슷하게 반복적으로 출제되고 있기 때문에 개념을 정확하게 공부하고 대표유형은 꼭 짚고 넘어가고 반복해서 친숙해지도록 하자!

유형/개념	2012학년도			2013학년도			2014학년도			2015학년도			2016학년도		
	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능
수렴하는 수열의 극한 (부정형)	3	2		20 23	2	3 9		14 22		22	3 28	3	14 26	27	
등비수열의 극한	28		2				3 10		3	8 12		28	3 12	3	
수렴하는 수열의 성질		25				19	24								
급수						19				25	12	24	26	9	
등비급수			28	18								11		20	
등비급수의 도형에의 활용	14	9	14	12	9	14	18	16	17	18	18		18		





1. 수열의 극한

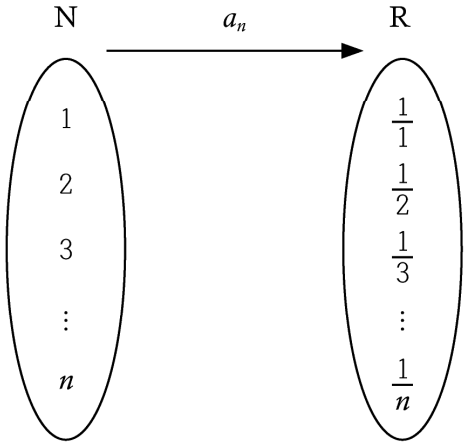
미리 알고가기

수열은 함수다!

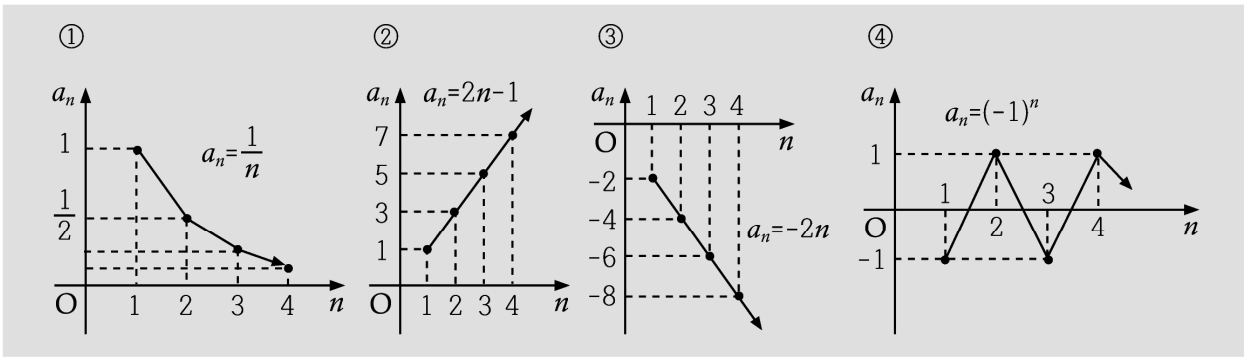
수열 $a_n=\frac{1}{n}$에 대해

$$a_1=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{1}{3},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{1}{n}$$

$\Leftrightarrow$



함수는 그래프를 그릴 수 있다! 즉, 수열의 그래프를 그려보자.



수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0에 한없이 가까이 간다.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}$과 0사이 "거리"가 0에 가까워진다.

$\Rightarrow$ 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0에 수렴!

수열 $\{2n-1\}$은 한없이 커진다.

$\Rightarrow$ 수열 $\{2n-1\}$은 발산!

수열 $\{-2n\}$은 한없이 작아진다.

$\Rightarrow$ 수열 $\{-2n\}$은 발산!

수열 $\{(-1)^n\}$은 ± 1의 두 값을 취하며 가까워지지 않는다.

$\Rightarrow$ 수열 $\{(-1)^n\}$은 진동(발산)!

↑

수렴

발산

Q $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$은 수렴할까? 발산할까?

개념 1 수열의 수렴과 발산

(1) 수렴

수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

: n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워진다. ($\Rightarrow$ a_n과 α 사이 거리가 0으로 간다.)

▸ α: 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한

▸ 기호 : $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

☀보기 ▸ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ = ... : 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 에 수렴한다.

(2) 발산

n이 한없이 커짐에 따라 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때,

수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

▸ 발산의 분류

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{진동}\end{cases}$$

Tip

$a_n = 3$과 같이 상수인 수열은

$3, 3, 3, \cdots$과 같이 항상 같은 값만 취하므로 3에 수렴한다.

Tip

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면,

$\lim_{n\to\infty} a_{n+5} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$

개념 2 수열의 극한에 관한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α, β는 실수)일 때

❶ $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ (단, c는 상수)

❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

❸ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

❹ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

❺ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

☀보기 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} 3 \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ = ...

$\lim_{n\to\infty}\left(10 - \frac{3}{n}\right)$ = ...

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ = ...

Tip

(1) 수열의 극한에 관한 기본 성질을 배우는 이유

▸ 더 많은 수열의 극한값을 '**식으로**' 구할 수 있다.

▸ 그래프를 그리지 않고도 함수의 극한을 빨리 구할 수 있다!

(2) 복잡한 수열은 간단한 수열의 합, 차, 곱, 몫으로 고치고, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 그 극한값을 구할 수 있다.

(3) 수열이 수렴할 때에만 항상 성립한다!

(4) 수열이 수렴하지 않으면 성립하지 않을 수도 있다.



기필코 유형 1 (2013학년도 대수능 9번 [4점] 변형)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2 + 2a_n + 2)$의 값은?

개념 3 ∞로 발산하는 수열에 관한 기본 성질

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ 인 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대해 $n\to\infty$일 때,

① $c \times a_n \to \infty$ $(c > 0)$

② $c \times a_n \to 0$ $(c = 0)$

③ $c \times a_n \to -\infty$ $(c < 0)$

④ $a_n + b_n \to \infty$

⑤ $a_n - b_n \to$ 모름! : **부정형 $\infty - \infty$**

⑥ $a_n \times b_n \to \infty$

⑦ $\frac{a_n}{b_n} \to$ 모름! : **부정형 $\frac{\infty}{\infty}$**

⑧ $\frac{c}{b_n} \to 0$ $\left(\frac{\text{상수}}{\infty} \to 0\right)$

☀보기 $\lim_{n\to\infty} n^2 =$, $\lim_{n\to\infty}(n-2)^2 =$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} 2n^2 =$, $\lim_{n\to\infty}\{n^2 + (n-2)^2\} =$

$\lim_{n\to\infty} 0 \times n^2 =$, $\lim_{n\to\infty} n^2(n-2)^2 =$

$\lim_{n\to\infty} -5n^2 =$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1} =$

부정형의 극한값 계산이 수능 단골 메뉴이다!

개념 4 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$꼴($\frac{\text{다항식}}{\text{다항식}}$)의 극한값

분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나누어 계산

① (분모의 차수) = (분자의 차수) ⇒

② (분모의 차수) > (분자의 차수) ⇒

③ (분모의 차수) < (분자의 차수) ⇒

☀보기 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-4n+3} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-4n+3} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+3}{2n+1} =$

Tip

부정형: 극한의 형태를 정할 수 없는 수열의 형태

Tip

왼쪽 성질에서 ⑤ $\{a_n - b_n\}$의 극한 $\infty - \infty$꼴이 부정형인 이유

: $n\to\infty$일 때,

$(n - n^2) \to$

$(n^2 - n) \to$

$(n - n) \to$

$\{n - (n-2)\} \to$

극한을 하나로 정할 수 없다.

Tip

⑦ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$의 극한 $\frac{\infty}{\infty}$꼴이 부정형인 이유

: $n\to\infty$일 때,

$\frac{2n}{n} \to$

$\frac{n}{n^2} \to$

$\frac{n^2}{n} \to$

극한을 하나로 정할 수 없다.



유형 정복

2 (2012학년도 6월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}$의 값은?

3 (2013학년도 대수능 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}$의 값은?

4 (2013학년도 9월 모의평가 2번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{8n^3+5}$의 값은?

5 (2015학년도 6월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}$의 값을 구하시오.

6 (2015학년도 9월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+1}{n^3+3}$의 값은?

7 (2015학년도 대수능 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}$의 값은?



8 (2014학년도 9월 모의평가 14번 [4점] 변형)

$a_n = n^3 - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^3}$의 값을 구하시오.

9 (2015학년도 9월 모의평가 28번 [4점] 변형)

$a_n = \sqrt{(3n+1)^2 + (4n)^2}$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_n - 3n}$를 구하시오.

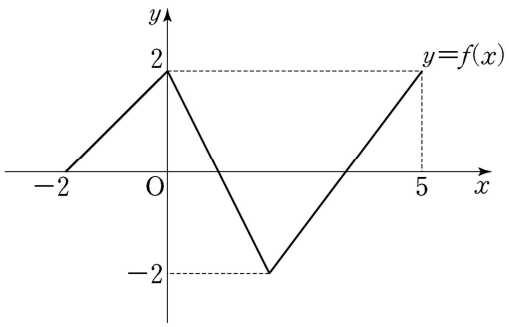
힌트) a_n으로 분자 분모를 나누면 $\dfrac{3n}{a_n}$의 극한만 구하면 된다!

10 (2013학년도 6월 모의평가 23번 [3점])

두 상수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2 + bn + 7}{3n+1} = 4$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

11 (2013학년도 6월 모의평가 20번 [4점])

닫힌 구간 $[-2, 5]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|nf(a)-1| - nf(a)}{2n+3} = 1$을 만족시키는 상수 a의 개수는?



개념 5 부정형 $\infty-\infty$꼴의 극한값

① 분모, 분자에 있는 무리식을 유리화 한다.
② 분모의 최고차항으로 나누어 극한값 계산한다.

기필코 유형 12 (2014학년도 9월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+28n}-n)$의 값을 구하시오.

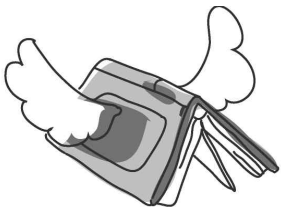
기필코 유형 13 (2016학년도 9월 모의평가 27번 [4점])

양수 a와 실수 b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)=\frac{1}{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

기필코 유형 14 (2016학년도 6월 모의평가 14번 [4점] 변형)

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$의 값을 구하시오.





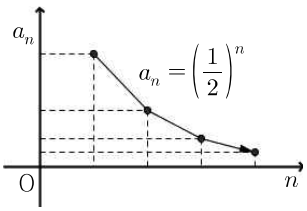
2. 등비수열의 극한

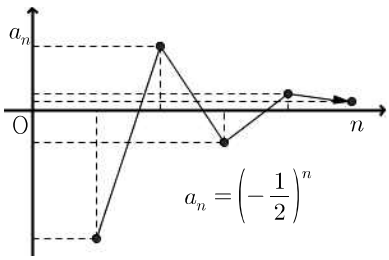
개념 1 등비수열

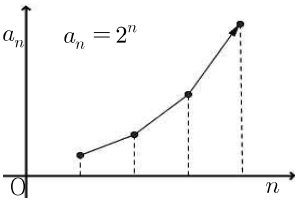
첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열은

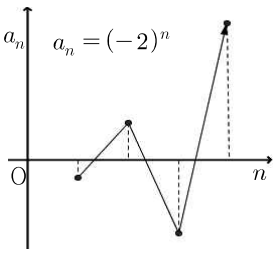
$a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, \cdots \Leftrightarrow a_n = ar^{n-1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

개념 2 수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산









① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n =$

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n =$

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n =$

④ $r=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n =$

⑤ $r<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n =$

Tip

등비수열의 첫째항과 일반항 찾기 $(a\neq 0, r\neq 0)$

일반항	첫째항	공비
ar^{n-1}	a	r
ar^n	ar	r
ar^{2n-1}	ar	r^2
ar^{3n+1}	ar^4	r^3
ar^{-n}	$ar^{-1}=\frac{a}{r}$	$r^{-1}=\frac{1}{r}$

Tip

① $-1<r<1 \Leftrightarrow |r|<1$

② $r<-1, 1<r \Leftrightarrow |r|>1$

Tip

$|r|>1$이면 $\{r^n\}$은 발산하지만, $\left|\frac{1}{r}\right|<1$이므로 $\frac{1}{r^n}=\left(\frac{1}{r}\right)^n$은 수렴한다.

⇨ 기출문제에서 자주 적용하는 사실이다!

수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴할 조건 : $a=0$ 또는 $-1<$공비$r\leq 1$

기필코 유형 15 (2016학년도 6월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}$의 값은?

기필코 유형 16 (2014학년도 3월 학력평가 25번 [3점])

등비수열 $\left\{\left(\frac{2x-3}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

개념 3 부정형의 극한값 계산

(1) 등비수열로 구성된 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$꼴

: 분모의 등비수열 중 절댓값이 큰 r^n항으로 나누어 준다.

(2) 등비수열로 구성된 부정형 $\infty-\infty$꼴

: 각 등비수열 중 절댓값이 큰 r^n으로 묶어 준다.

기필코 유형 17 (2012학년도 대수능 2번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$의 값은?





유형 정복

18 (2014학년도 6월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은?

19 (2015학년도 6월 모의평가 12번 [3점] 변형)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\cdot 4^n}{4^n+1}$의 값은?

20 (2014학년도 대수능 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n}$의 값은?

21 (2014학년도 6월 모의평가 10번 [3점] 변형)

$x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$의 값을 구하시오.

22 (2016학년도 9월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+1}+1}{2^n}$의 값은?

23 (2015학년도 6월 모의평가 8번 [3점])

첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}$의 값은?

24 (2012학년도 6월 모의평가 28번 [4점] 변형)

두 수열

$a_n=\frac{2}{5}(4^n+2^{n-1})$, $b_n=\frac{1}{5}(4^n-2^{n+1})$에 대해

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=p$이다. $60p$의 값을 구하시오.

25 (2016학년도 6월 모의평가 12번 [3점])

공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$을 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은?

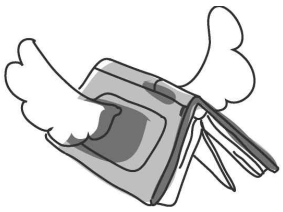
26 (2015학년도 대수능 28번 [4점])



자연수 k에 대하여 $a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}$이라

할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오.





3. 수열의 극한의 다양한 성질

개념 1 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때,

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면, $\alpha \le \beta$이다.

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ 이다.

Tip

모든 자연수 n에 대해 $a_n < b_n$이어도 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$을 만족한다.

기필코 유형 27 (2014학년도 6월 모의평가 24번 [3점])

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오.

Tip 기필코 유형 접근법 – 수열의 극한값 찾는 꿀 팁

수열 $\{a_n\}$으로 표현된 수열의 극한값이 주어질 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$구하기

유형① $\{a_n\}$이 포함된 수열을 b_n이라 놓고, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구한다.

유형② 극한을 구하고자 하는 수열의 모양을 극한값이 주어진 수열의 형태로 고친다.

유형① 기필코 유형 28

(2013학년도 대수능 19번 [4점] 변형)

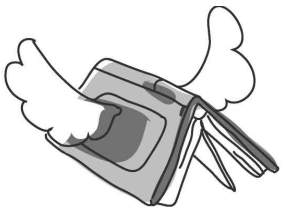
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$일 때, $\lim_{n\to\infty}({a_n}^2+2a_n+2)$의 값은?

유형② 기필코 유형 29

(2012학년도 9월 모의평가 25번 [3점])

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_n\neq 0$)





4. 급수

개념 1 급수

(1) 급수

: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$ <---- 기호일 뿐! 합의 계산은 S_n 이용!

(2) 부분합

: $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n$$

Tip

부분합을 이용하면 급수는 다음과 같이 표현된다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

즉, 급수는

수열 $\{S_n\}$의 극한이다!

개념 2 급수의 수렴과 발산

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\lim_{n\to\infty}S_n$ 이므로

(1) 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 S에 수렴할 때, 급수는 S에 수렴한다고 한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

(2) 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 급수는 발산한다고 한다.

기필코 유형 30 (2016학년도 9월 모의평가 9번 [3점])

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}$의 값은?

개념 3 급수와 일반항

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(왜?)

② $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(왜?)

Tip

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이더라도

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 항상 수렴하는 것은 아니다.

(반례) $a_n = \frac{1}{n}$

기필코 유형 31 (2015학년도 6월 모의평가 25번 [4점])

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$이

수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.



유형 정복

32 (2015학년도 9월 모의평가 12번 [3점])

자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은?

33 (2013학년도 대수능 19번 [4점])

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)$의 값은?

개념 4 등비급수

첫째항이 $a(a \neq 0)$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 덧셈기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

: **첫째항이 a, 공비가 r인 등비급수**

개념 5 등비급수의 수렴과 발산

(1) $|r| < 1$일 때, 수렴 : $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

(2) $|r| \geq 1$일 때, 발산

☀보기) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n}$ 의 값은?

Tip

첫째항과 공비에 따른 등비급수 계산하기

($|b| < 1$일 때)

① $\sum_{n=1}^{\infty} a \times b^{n-1} =$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a \times b^{n} =$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a \times b^{2n+1} =$

개념 6 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

Tip

수렴하는 수열의 성질이 성립하는 것처럼 수렴하는 급수의 성질도 성립하는구나!

Tip

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$





유형 정복

34 (2016학년도 6월 모의평가 26번 [4점])

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}$의 값을 구하시오.

35 (2015학년도 대수능 24번 [3점])

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4, \sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n)$의 값을 구하시오.

36 (2012학년도 대수능 28번 [4점] 변형)

등비수열 $\{a_n\}$에 대해 $a_n=3^{n+1}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

37 (2015학년도 대수능 11번 [3점])

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3, a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은?

38 (2013학년도 6월 모의평가 18번 [4점])

2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은?

39 (2016학년도 9월 모의평가 20번 [4점] 변형)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$의 값은?

개념 7 등비급수의 도형에의 활용

⇨ 도형의 '넓이'나 '길이'가 일정한 비율로 줄어들 때, 그 도형의 넓이나 길이의 합은 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 된다.

(1) 길이의 비가 $m:n$이면 넓이비는 $m^2 : n^2$이다.

(2) 길이나 넓이의 첫째항을 구한다.

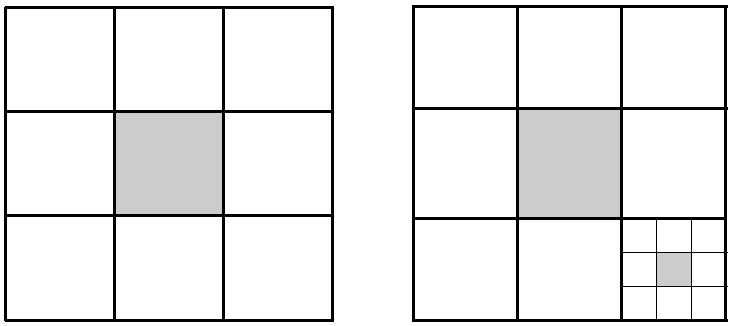
(3) 넓이비를 이용하여 공비를 찾는다.

유형① ▸ 닮음비가 $m:n$인 도형의 넓이의 공비 : $\frac{n^2}{m^2}$

유형② ▸도형의 개수가 k배씩 늘어날 때의 공비 : $k \times \frac{n^2}{m^2}$

☀보기) **유형①**

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형을 9등분하여 내부에 있는 정사각형 1개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 색칠을 하지 않은 나머지 정사각형 중 1개의 정사각형을 9등분하여 내부에 있는 정사각형 1개를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠된 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

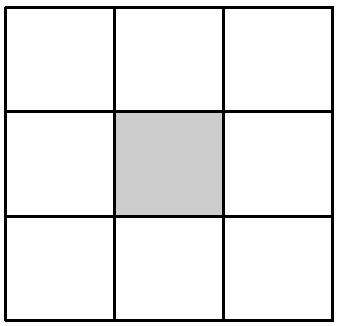


R_1 R_2 …

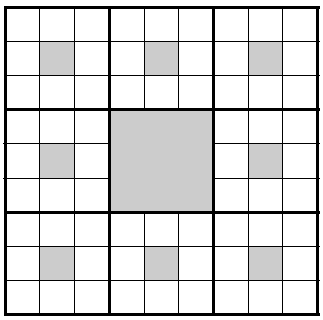


☀보기》 **유형②**

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형을 9등분하여 내부에 있는 정사각형 1개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 색칠을 하지 않은 나머지 정사각형을 각각 9등분하여 내부에 있는 정사각형 1개를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠된 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

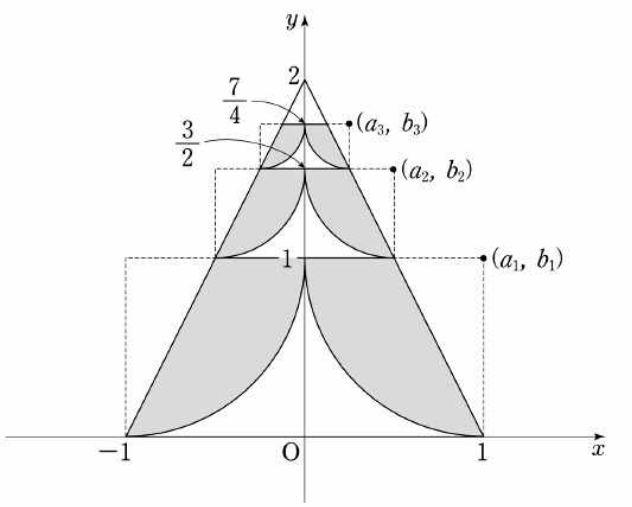
…



유형 정복

유형① 40 (2012학년도 6월 모의평가 14번 [4점])

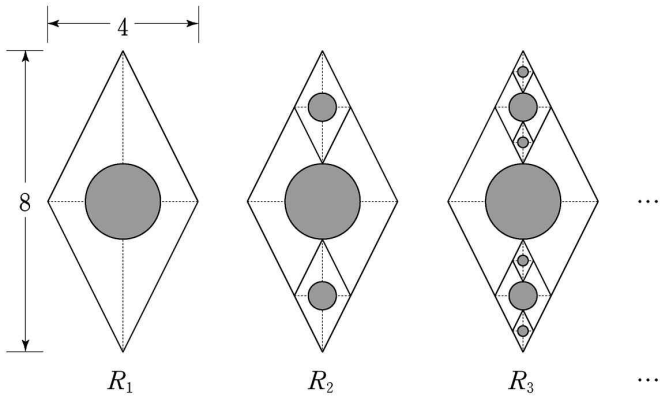
두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 일반항이 각각 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이다. 좌표평면에서 중심이 (a_n, b_n)이고 y축에 접하는 원의 내부와 연립부등식 $\begin{cases} y \le b_n \\ 2x+y-2 \le 0 \end{cases}$이 나타내는 영역의 공통부분을 P_n이라 하고, y축에 대하여 P_n과 대칭인 영역을 Q_n이라 하자. P_n의 넓이와 Q_n의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?





유형② **41** (2012학년도 9월 모의평가 9번 [3점])

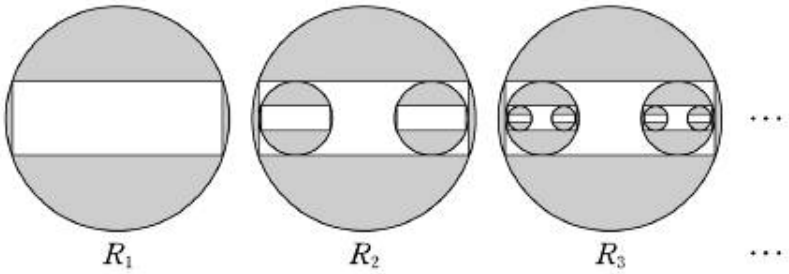
그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 $8, 4$인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4개 그린다. 새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?



유형② 42 (2012학년도 대수능 14번 [4점])

반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $3:1$인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

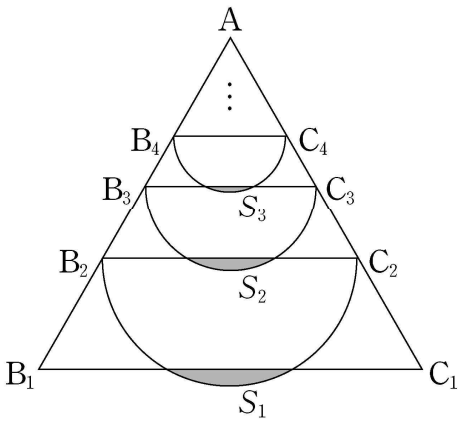
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





유형① 43 (2013학년도 6월 모의평가 12번 [3점])

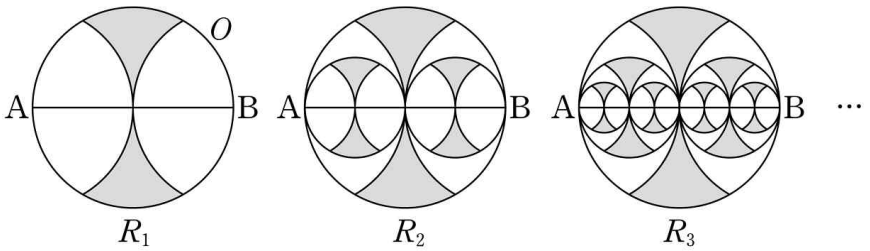
한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자. 정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고 선분 B_3C_3를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



유형② **44** (2013학년도 9월 모의평가 9번 [3점])

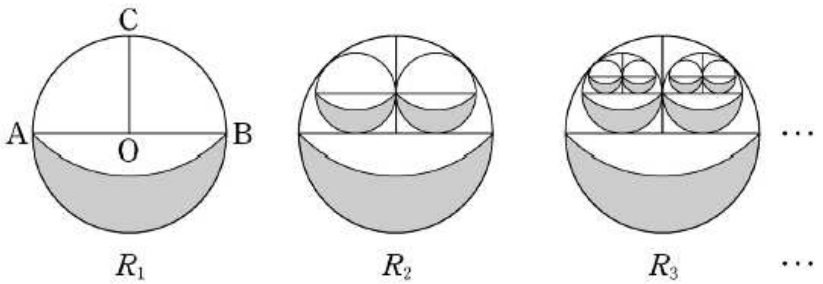
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 $\bigtimes$모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\bigtimes$모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\bigtimes$ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 $\bigtimes$모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



유형② **45** (2013학년도 대수능 14번 [4점])

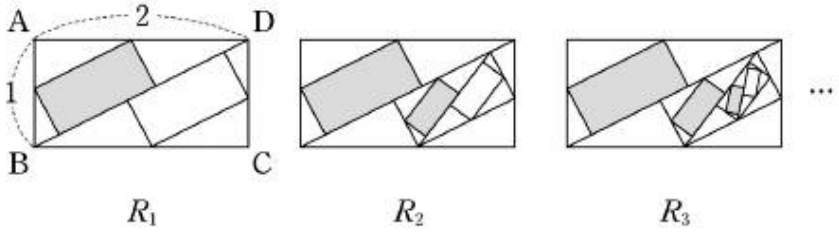
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 $\smile$ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\smile$ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 $\smile$ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





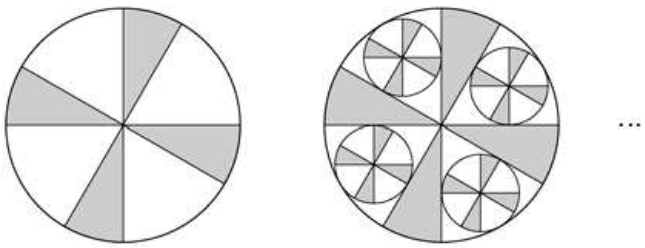
유형① **46** (2014학년도 6월 모의평가 18번 [4점])

직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1, \overline{AD}=2$이다. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



유형② **47** (2014학년도 9월 모의평가 16번 [4점])

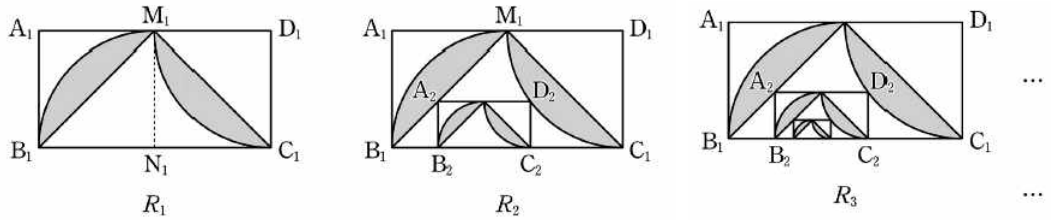
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자. [그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



[그림 1] [그림 2]

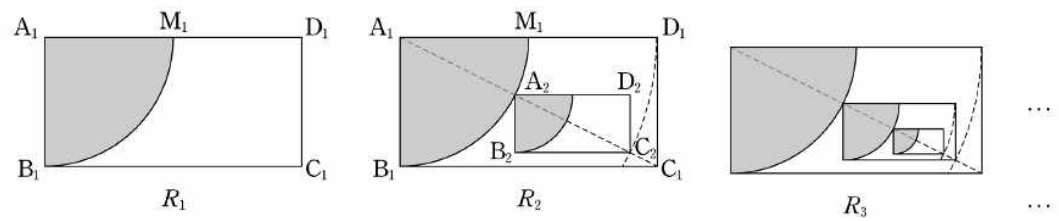
유형② **48** (2014학년도 대수능 17번 [4점])

직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1, \overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 ◠모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◠모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



유형① **49** (2015학년도 6월 모의평가 18번 [4점])

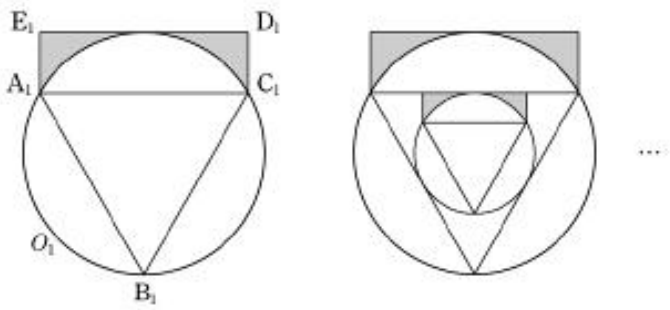
그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2, \overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





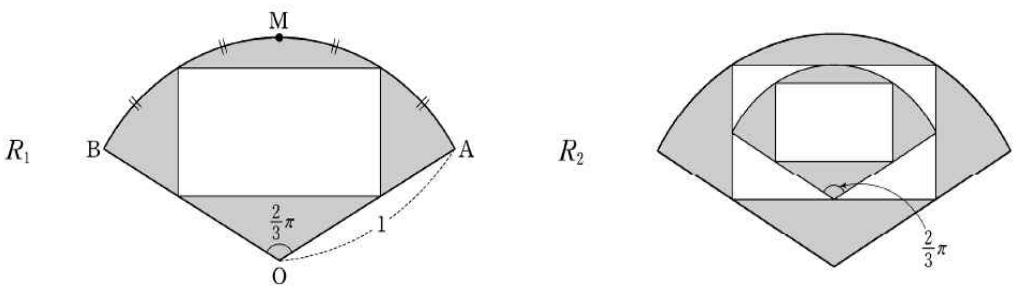
유형① **50** (2016학년도 6월 모의평가 18번 [4점])

반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



유형① **51** (2015학년도 9월 모의평가 18번 [4점])

중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴의 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



III

함수의 극한과 연속

함수의 극한의 뜻과 성질

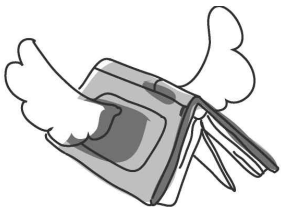
함수의 연속의 뜻과 성질



함수의 극한은 수열의 극한을 확장하여 생각할 수 있다. 수열 역시 함수이기 때문에 수열의 극한의 개념과 대표유형을 잘 정리했다면 함수의 극한의 첫 단추는 잘 끼워졌다고 할 수 있다. 또한, 함수의 극한의 나머지 개념들도 부정형에 대한 분류와 좌우극한에 대한 개념을 정확히 이해하고 나면 관련된 기출문제들이 반복적으로 출제되고 있는 부분들이 많기 때문에 개념과 대표유형만 반복 학습하여도 단기간에 점수 향상을 기대해 볼 수 있다.

유형화된 3점짜리 문제에서부터 4점짜리 고난이도 문제까지 두루 출제가 되고 있고, 매년 함수의 극한과 연속에서만 3문항이 출제되고 있다. 어려운 기출문제는 지금 당장 해결하려 하기 보다는 연속의 개념을 거듭 공부하면서 문제별로 연속의 개념이 어떻게 활용이 되는지 하나씩 정리하는 것이 필요하다. 어려운 유형은 비슷하게 변형하여 다시 출제 될 가능성이 있기 때문이다. 뿐만 아니라. 함수의 극한 단원은 미분을 배우기 위한 기본 토대가 되므로 학습결손을 방지하기 위해서라도 각 개념을 꼼꼼하게 짚고 넘어가자 ☺

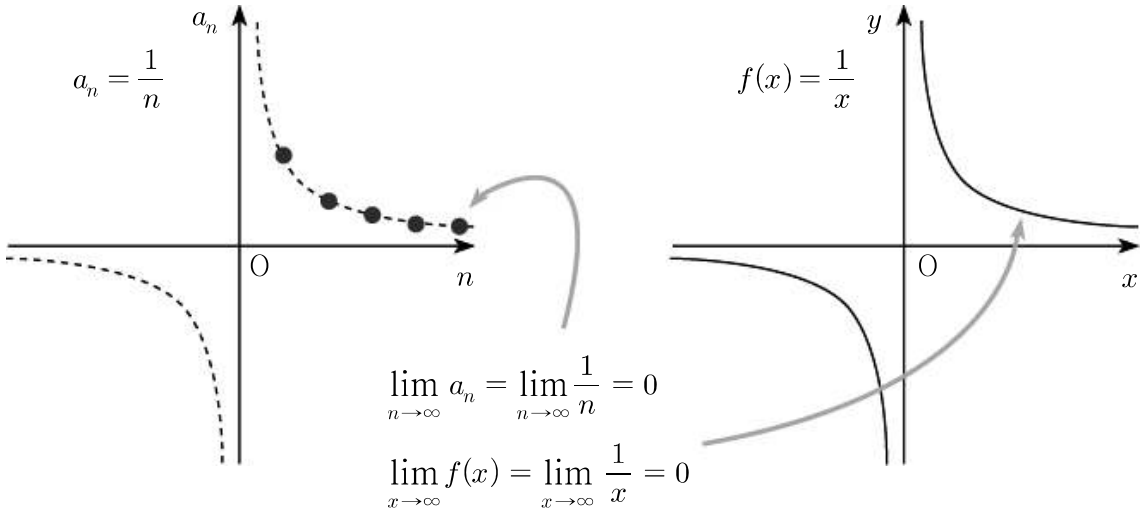
유형/개념	2012학년도			2013학년도			2014학년도			2015학년도			2016학년도		
	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능
극한값 구하기 (비부정형)	22			3	22				22		22		22	28	
$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴			12							29	21			28	
$\frac{0}{0}$ 꼴	5	22	22			22	25	3		29 3		22	7	5	
좌극한 우극한	7 18	11	18	6	5	5 18	11 10	7 15	11	13	8	8	9	8	
함수의 극한성질	5			5 9		20	9 25			21 25	21		7		
연속		20	18	19	13	20	10 11 13	7	28	7	25	23	29		



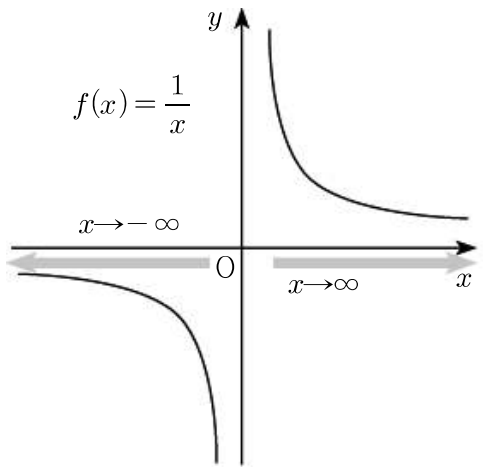
1. 함수의 극한의 뜻과 성질

미리 알고가기

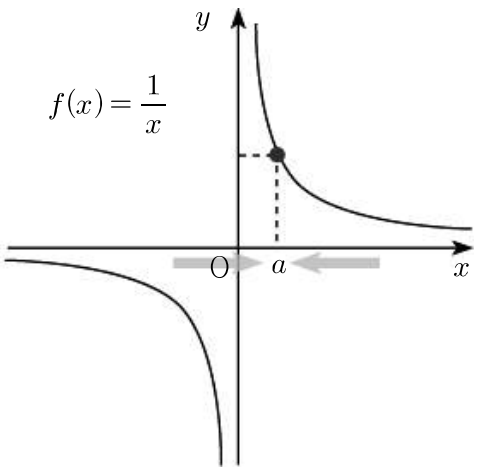
▶ 함수의 극한은 수열의 극한을 포함한다?



▶ 함수의 극한이 수열의 극한과 다른 점은?



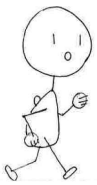
x의 값이 한없이 커질 때와 x의 값이 한없이 작아질 때, 함숫값 $f(x)$의 극한 모두를 생각할 수 있다.



x의 값이 고정된 상수 a에 한없이 가까워질 때, 함숫값 $f(x)$의 극한을 생각할 수 있다.

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 '$x \to \infty$**일 때, 함수** $f(x)$**는** L**(극한값)에 수렴한다.**'고 하고, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$로 쓴다.

(2) '$x \to -\infty$**일 때, 함수** $f(x)$**는** L**(극한값)에 수렴한다.**' $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$



개념 1 ($x\to\pm\infty$일 때) 함수의 극한

(1) x가 한없이 커질 때의 극한 $\left[\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}\text{꼴 부정형}\right]$

: 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나누어 계산한다.

① (분모의 차수) = (분자의 차수) $\Rightarrow$

② (분모의 차수) > (분자의 차수) $\Rightarrow$

③ (분모의 차수) < (분자의 차수) $\Rightarrow$

(2) x가 한없이 커질 때의 극한 $\left[\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty-\infty\text{꼴 부정형}\right]$

: 무리식이 있는 분자나 분모를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 부정형으로 고쳐서 계산한다.

(3) x가 한없이 작아질 때의 극한 $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\text{꼴}\right]$

: $-x=t$로 치환하여 $\lim_{t\to\infty} f(-t)$로 바꾼 뒤, (1), (2)와 같이 구한다.

Tip

$x\to\infty$일 때의 극한은 수열의 극한처럼 생각한다! 즉,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{n\to\infty} a_n$$

Tip

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$에서 $-x=t$로 치환하면,

① $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이고,

② $f(x)=f(-t)$가 된다.

즉, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty} f(-t)$이다.

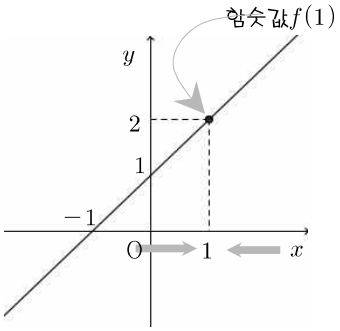
기필코 유형 1 (2015학년도 6월 모의평가 29번 [4점] 변형)

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$, $f(1)=0$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오.

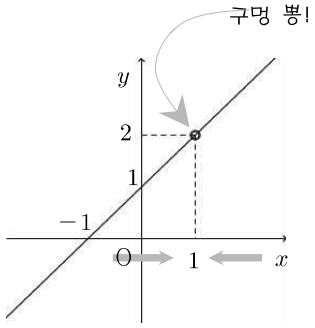
☀보기 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x}}{x+1}$의 값을 구하시오.

개념 2 ($x \to a$일 때) 함수의 극한

STEP 1) 그래프로 보기



x가 1에 한없이 가까워질 때,
$f(x)$는 $2=f(1)$에 한없이 가까워진다.
: $\lim_{x \to 1} f(x)=2=f(1)$



비록, $x=1$에서 함숫값은 없지만, x가 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$는 2에 한없이 가까워진다.
: $\lim_{x \to 1} f(x)=2$

x가 (a가 아니면서) a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$는 b에 수렴한다.
: $x \to a$일 때, $f(x) \to b$
: $\lim_{x \to a} f(x)=b$(극한값)

STEP 2) 위 그래프를 식으로 보기

① $f(x)=x+1$
이므로

$\lim_{x \to 1}(x+1)=2$

② $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$x=1$에서 구멍난
$f(x)=x+1$
⇨ 부정형 $\dfrac{0}{0}$꼴

이므로

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x \to 1}(x+1)=2$

$x \to a$일 때, 극한값 계산은 두 가지 유형!

① $\lim_{x \to a} f(x)$을 $x=a$를 대입하여 바로 구할 수 있는 경우<--$f(a)$로 구하면 끝!

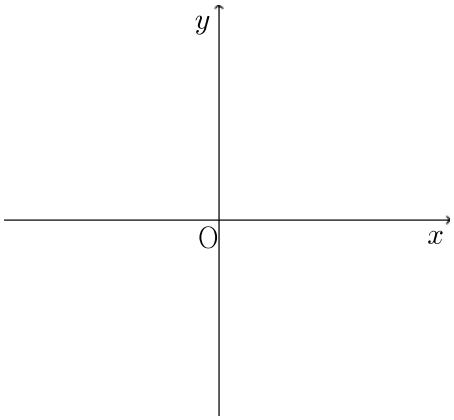
② $\lim_{x \to a} f(x)$에서 $x=a$를 대입하면 $\dfrac{0}{0}$꼴이 나오는 경우<--------부정형 $\dfrac{0}{0}$꼴
: 매번 그래프를 그릴 수 없으니, $(x-a)$를 약분하여 극한을 구한다!



기필코 유형 2 (2013학년도 6월 모의평가 3번 [2점])

유형① $\lim_{x\to 0}(x^2+2x+3)$의 값은?

그래프로 보기)

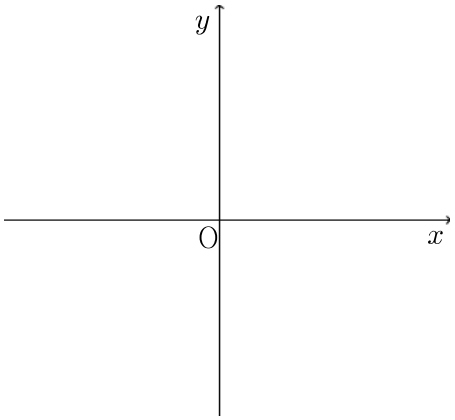


식으로 보기)

기필코 유형 3 (2013학년도 대수능 22번 [3점])

유형② $\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}$의 값은?

그래프로 보기)



식으로 보기)

개념 3 함수의 극한에 대한 성질(1)

$\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때

❶ $\lim_{x\to a}cf(x)=cL$ (단, c는 상수)

❷ $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=L+M$

❸ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=L-M$

❹ $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=LM$

❺ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (단, $M\neq 0, g(x)\neq 0$)

☀보기 $\lim_{x\to 2}(x+1)=$ _____, $\lim_{x\to 2}(x^2-9)=$ _____ 이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2-9}=$ _____ 이다.

Tip

왼쪽 성질은

$x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$

일 때에도 성립한다.

기필코 유형 4 (2016학년도 6월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x-1}$의 값을 구하시오.

개념 4 함수의 극한의 부정형 정리하기

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$꼴 부정형

: 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나누어 계산

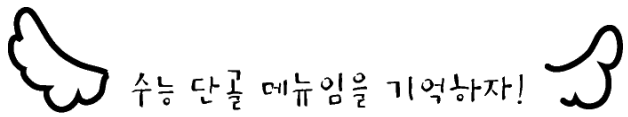
① (분모의 차수) = (분자의 차수) $\Rightarrow$

② (분모의 차수) > (분자의 차수) $\Rightarrow$

③ (분모의 차수) < (분자의 차수) $\Rightarrow$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$꼴 부정형

: 분모에 0을 만드는 식 $(x-a)$를 모두 약분해서 모두 없애야 극한을 구할 수 있다.



기필코 유형 5 (2016학년도 9월 모의평가 28번 [4점])

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$ (나) $\lim_{x\to 0} f(x)=-7$


Tip

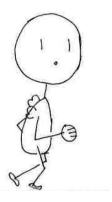
$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$꼴 부정형에서 분모에 0을 만드는 식 $(x-a)$가 남아 있으면 $\lim_{x\to a} f(x)$는 극한값이 존재하지 않는다. 즉, 발산한다.

(예) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}$
$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}$ ⇦ 발산


Tip

$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$꼴 부정형에서 분자에만 0을 만드는 식 $(x-a)$가 남아 있으면 극한값은 0이다.

(예) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}$
$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2}=\frac{0}{3}=0$





유형 정복

유형① $x\to\infty$일 때의 극한(수열의 극한과 동일!)

6 (2012학년도 대수능 12번 [3점] 변형)

$\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2+2t+1}{t^2+2t+1}$의 값을 구하시오.

7 (2015학년도 9월 모의평가 21번 [4점] 변형)

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$를 만족할 때, 몇 차 이하의 함수인지 구하시오.

유형② $x\to a$일 때의 극한($x=a$를 대입해서 쉽게 구하는 경우)

8 (2013학년도 9월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x}{x+1}$의 값을 구하시오.

9 (2014학년도 대수능 22번 [3점])

$\lim_{x\to 0}\sqrt{2x+9}$의 값을 구하시오.

10 (2015학년도 9월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{x-2}$의 값을 구하여라.

11 (2012학년도 6월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+ax+1}=\frac{1}{9}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.



유형 정복

유형③ $x \to a$일 때의 극한 (부정형 $\frac{0}{0}$ 꼴)

12 (2012학년도 9월 모의평가 22번 [3점])

$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$의 값을 구하시오.

13 (2012학년도 대수능 22번 [3점])

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$의 값을 구하시오.

14 (2014학년도 6월 모의평가 25번 [2점] 변형)

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$의 값은?

15 (2014학년도 9월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)}$의 값은?

16 (2015학년도 6월 모의평가 3번 [2점])

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$의 값은?

17 (2015학년도 대수능 22번 [3점])

$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+7)}{x}$의 값을 구하시오.

18 (2016학년도 9월 모의평가 5번 [3점])

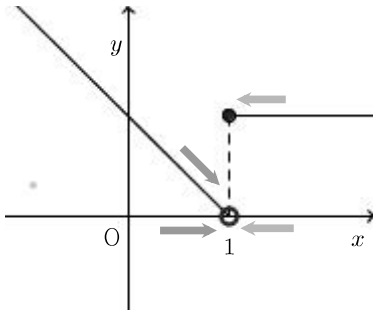
$\lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(x+3)}{(x-7)}$의 값은?

19 (2012학년도 6월 모의평가 5번 [3점])

함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?



개념 5 함수의 우극한, 좌극한



$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \geq 1)\\ -x+1 & (x<1)\end{cases}$$

(1) 좌극한

: x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때,
함수 $f(x)$의 값이 일정한 M에 한없이 가까워지는 것

▸ 기호 : $\lim_{x \to a-} f(x)=M$

(2) 우극한

: x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때,
함수 $f(x)$의 값이 일정한 L에 한없이 가까워지는 것

▸ 기호 : $\lim_{x \to a+} f(x)=L$

(3) 함수의 극한값

$$\lim_{x \to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x)=L=\lim_{x \to a-} f(x)$$

좌, 우극한은 함수의 그래프와 같이 자주 출제된다!

Tip

왼쪽 그래프에서

$\lim_{x \to 1-} f(x)=0$,

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

Tip

개념 3 함수의 극한에 대한 성질 (1)은 좌,우극한이 존재하는 경우에도 각각 성립한다.

Tip

$x \to a+$인 경우와 $x \to a-$인 경우를 통틀어 $x \to a$로 쓴다.

Tip

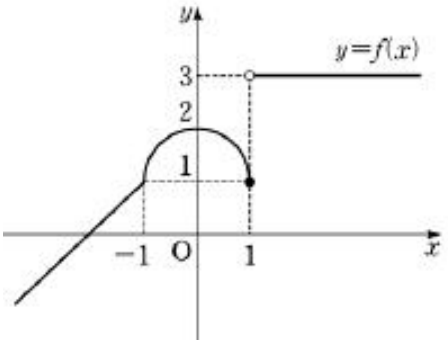
$x=a$에서

$\lim_{x \to a+} f(x)=\lim_{x \to a-} f(x)$이어야

$\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다고 할 수 있다.

기필코 유형 20 (2016학년도 6월 모의평가 9번 [3점])

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{x\to -1} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?



기필코 유형 21 (2014학년도 9월 모의평가 7번 [3점] 변형)

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le 1) \\ -x+a & (x>1) \end{cases}$가 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값을 구하시오.





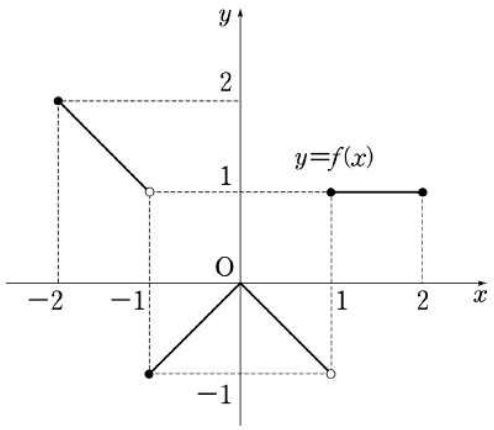
유형 정복

유형① 그래프와 함께 출제되는 좌, 우극한 문제

22 (2012학년도 6월 모의평가 7번 [3점])

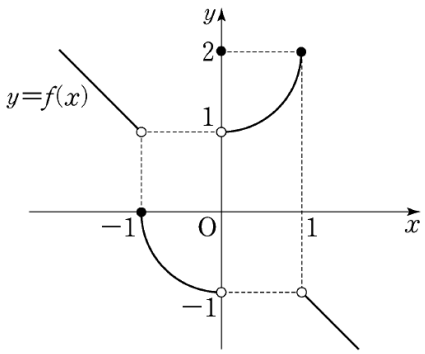
정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은?



23 (2012학년도 9월 모의평가 11번 [3점])

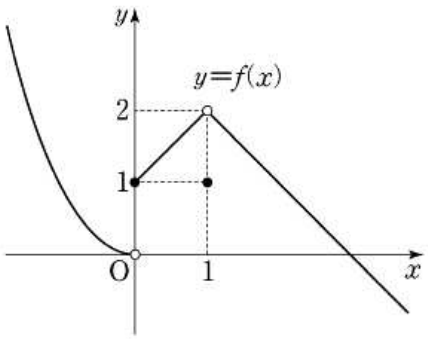
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은?

24 (2012학년도 대수능 18번 [4점] 변형)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

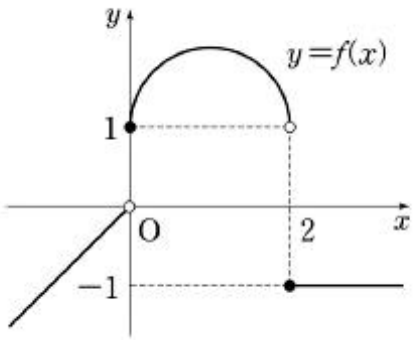


< 보기 >

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=1$ ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

25 (2014학년도 6월 모의평가 11번 [3점] 변형)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



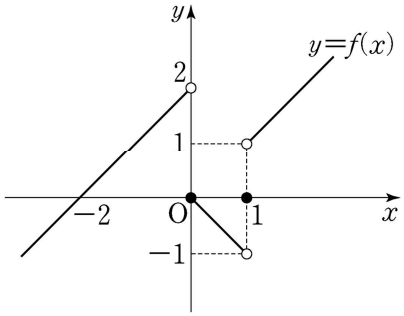
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=1$ ㄴ. $\lim_{x \to 2-} f(x)=-1$

26 (2013학년도 6월 모의평가 6번 [3점])

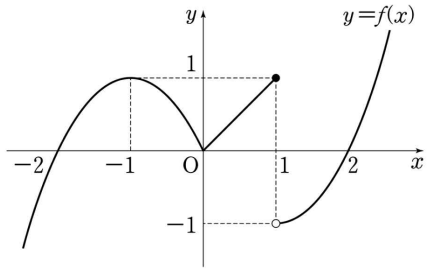
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

27 (2013학년도 9월 모의평가 5번 [3점])

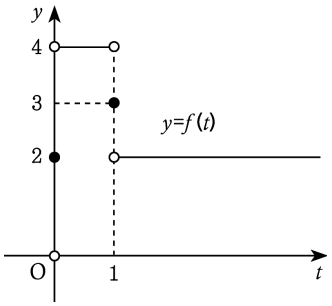
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

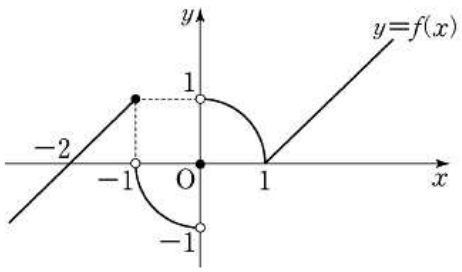
28 (2012학년도 6월 모의평가 18번 [4점] 변형)

함수 $f(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은?



29 (2013학년도 대수능 5번 [3점])

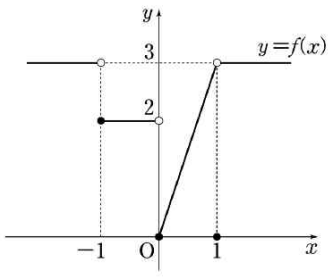
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)$의 값은?

30 (2014학년도 대수능 11번 [3점])

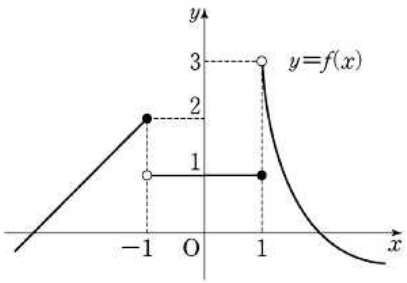
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)$의 값은?

31 (2015학년도 6월 모의평가 13번 [3점])

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

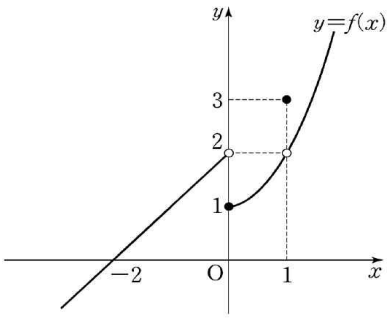


$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?



32 (2015학년도 9월 모의평가 8번 [3점])

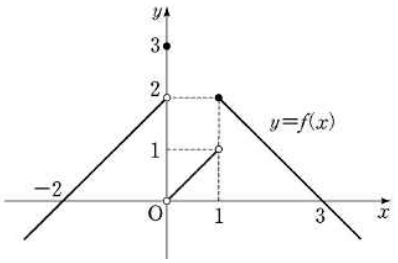
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은?

33 (2015학년도 대수능 8번 [3점])

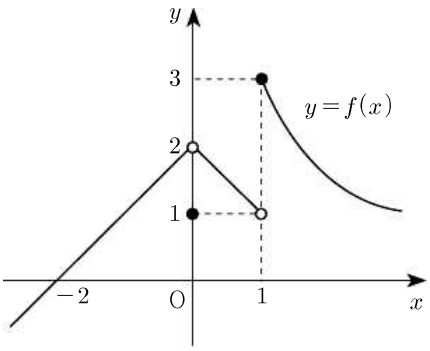
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

34 (2016학년도 9월 모의평가 8번 [3점])

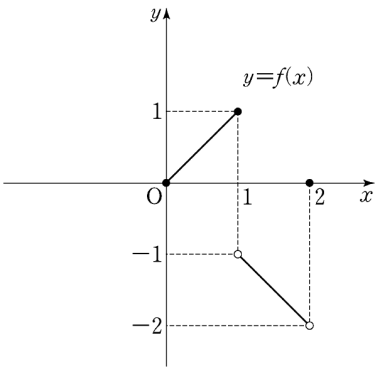
함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

35 (2014학년도 9월 모의평가 15번 [4점])

정의역이 $\{x|-2\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은?



유형② $x=a$ 좌우에서 다른 함수식으로 정의된 경우

36 (2013학년도 9월 모의평가 13번 [3점] 변형)

함수 $f(x)=\begin{cases} a & (x \le 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$가

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

37 (2014학년도 6월 모의평가 10번 [3점] 변형)

함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le 1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$가

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

38 (2013학년도 대수능 18번 [4점] 변형)

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ 3x^2+x+1 & (x \ge 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 극한값이 존재할 때, a의 값은?



개념 6 함수의 극한에 대한 성질(2)

$\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$ (L, M이 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $L \le M$

(2) $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고, $L=M$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=L$

Tip
왼쪽 성질은
$x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$
일 때에도 성립한다.

☀보기 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$을 구하시오.

$$\frac{x^2+x}{2x^2+5} \le f(x) \le \frac{x^2+3x+10}{2x^2}$$

개념 7 함수의 극한에 대한 성질(3)

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ ($g(x)\neq 0$, L은 상수)이고 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면, $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ ($g(x)\neq 0$, $L\neq 0$은 상수)이고 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이면, $\lim_{x\to a} g(x)=0$이다.

기필코 유형 39 (2016학년도 6월 모의평가 7번 [3점])

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{4x-a}{x-1}=b$일 때, $a+b$의 값은?

Tip **기필코 유형 접근법 - 치환하여 극한값 구하기**

극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{g(x-a)}$는 $x-a=t$로 치환하면 $x\to a$일 때, $t=x-a\to 0$이므로 다음과 같다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{g(x-a)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}$$



유형 정복

40 (2013학년도 6월 모의평가 5번 [3점])

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax}{x-1}=b$일 때, $a+b$의 값은?

41 (2014학년도 6월 모의평가 9번 [3점])

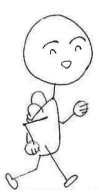
함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?

42 (2014학년도 6월 모의평가 25번 [3점])

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오.

43 (2013학년도 6월 모의평가 9번 [3점])

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$ 일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\begin{cases} A\text{로 수렴} \Rightarrow A : \text{극한값} \\ \pm\infty\text{로 발산} \Rightarrow \text{극한값 존재 안함} \\ \text{그 외 발산(예 : 진동발산)} \Rightarrow \text{극한값 존재 안함} \end{cases}$$

핵심

- 수열의 극한과 비슷하게 생각.
- 최고차항을 고려한다.($x\to\infty$일 때, 최고차항이 가장 힘이 세기 때문)
- $\frac{\text{상수}}{\infty}\to 0$ (예 : $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{-100}{x}=0$)

대표 유형

$\frac{\infty}{\infty}$ 부정형

최고차항의 차수를 비교!

- $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5}{3x^2-2x+1}=-\frac{2}{3}$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+5}{3x^2-2x+1}=0\left(\because \frac{\text{상수}}{\infty}=0\right)$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5}{2x+1}=-\infty$

☞ 분자와 분모의 차수가 같은 경우에만, 0 아닌 극한값을 가진다.

$\infty-\infty$ 부정형

- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$
- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2-x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

분자를 유리화 하여 구한다.

- $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\times\infty=\infty$

∞나 $-\infty$로 발산

- $\lim_{x\to\infty}(x^2+x)=\infty$,
- $\lim_{x\to\infty}(-x^2-x)=-\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} A\text{로 수렴} \Rightarrow A : \text{극한값} \\ \pm\infty\text{로 발산} \Rightarrow \text{극한값 존재 안함} \\ \text{그 외 발산 (예 : 좌우극한 다른 경우)} \Rightarrow \text{극한값 존재 안함} \end{cases}$$

핵심

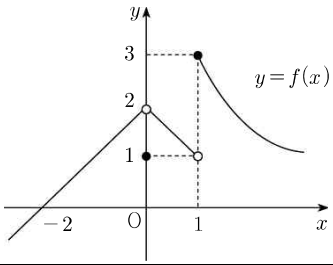
- 좌극한과 우극한이 같은지 먼저 확인한다.
- $\lim_{x\to a} f(x)$의 극한은 $f(a)$를 먼저 구해본다. 만약 $x=a$ 대입했을 때,

 부정형($\frac{0}{0}$,0∞)일 경우는 식을 변형하여 극한값을 구한다.

대표 유형

그래프

- 그래프를 이용해서
 좌극한, 우극한 구하는 문제



$\frac{0}{0}$ 부정형

$\lim_{x\to a} f(x)$에서 $f(a)$가 $\frac{0}{0}$꼴이면, 주어진 식을 변형하여 $(x-a)$를 분모에서 모두 소거한 뒤, $x=a$를 대입하여 극한값 구한다.

예) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{4}$

, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+5})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{1}{\sqrt{6}+2}$

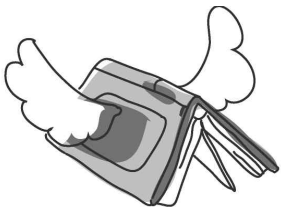
$0\times\infty$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right)$ <-----이런게 있구나 우선 참고만 하세요.

발산

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ (즉, $\frac{\text{상수}}{0}$꼴은 발산한다.)





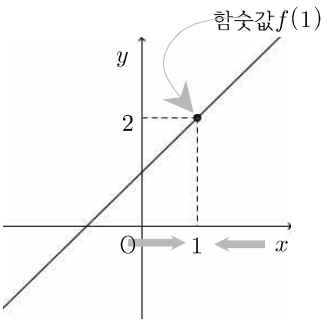
2. 함수의 연속의 뜻과 성질

미리 알고가기

- 함수의 연속은 함수의 그래프를 직접 그린다고 생각했을 때, 연필을 종이에서 떼지 않고 이어서 그릴 수 있는 상태와 연결하여 생각할 수 있다!

STEP 1) 그래프로 보기

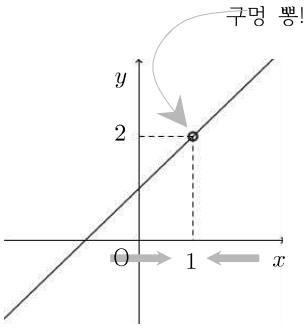
①



연필을 종이에서 떼지 않고 그릴 수 있다.

⇨ 모든 x에서 연속이다!

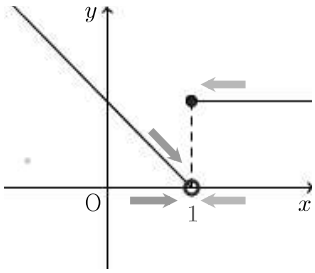
②



다른 점에서는 연속적으로 그리다가 $x=1$에서 연필을 떼고 그려야 한다. ㅠ_ㅠ

⇨ $x=1$에서 불연속!

③



왼쪽에서부터 연속적으로 그리다가 $x=1$에서 연필을 떼고 점프해서 그려야 한다. ㅠ_ㅠ

⇨ $x=1$에서 불연속!

STEP 2) 식으로 보기 ($x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이란?)

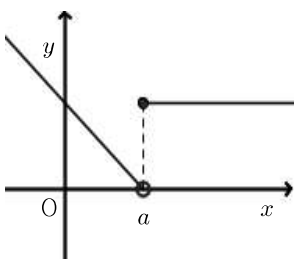
(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다. <---- 구멍이 막혀있다는 뜻

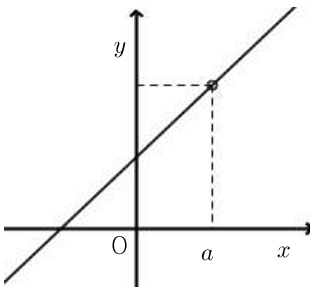
(2) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. <---------- 좌, 우극한이 같다는 뜻

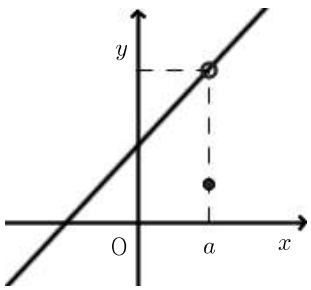
(3) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ <---------- $x=a$로 다가갈 때,

$f(x)$가 다가가는 값에 구멍이 막혀 있어서 연속이 된다는 뜻!

STEP 3) $x=a$에서 불연속인 예







개념 1 함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

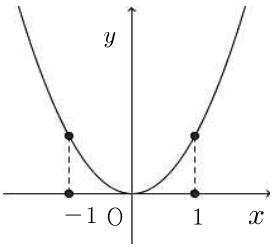
(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

개념 2 연속함수

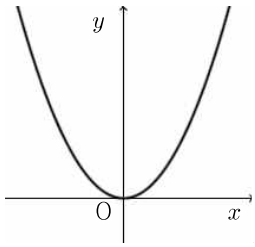
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 연속함수이다.

: 함수 $f(x)$가 그 구간의 모든 실수에서 연속이다.

예)



$y=x^2$은
구간 $[-1, 1]$
에서 연속이다.



$y=x^2$은
실수 전체에서
연속이다.

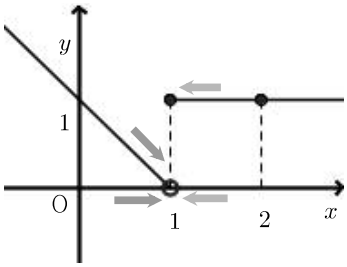
⇨ 연속함수는 '불연속점이 없는 함수'이구나!

기필코 유형 44 (2014학년도 9월 모의평가 7번 [3점])

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 1) \\ -x+a & (x>1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

Tip

연속은 각 점마다 생각해야 하는 개념이야. 무슨 말이냐고?



위 그래프에서

① $f(x)$는 $x=1$에서는 불연속이지만,

② $x=2$에서는 연속이다! 뿐만 아니라,

③ $x \neq 1$인 모든 x에서 연속이라는 사실^^

Tip

구간 $(a<b$일 때)

$[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

$[a, b) = \{x | a \le x < b\}$

$(a, b] = \{x | a < x \le b\}$

$[a, \infty) = \{x | a \le x\}$

$(a, \infty) = \{x | a < x\}$

$(-\infty, a] = \{x | x \le a\}$

$(-\infty, a) = \{x | x < a\}$





유형 정복

45 (2015학년도 6월 모의평가 7번 [3점])

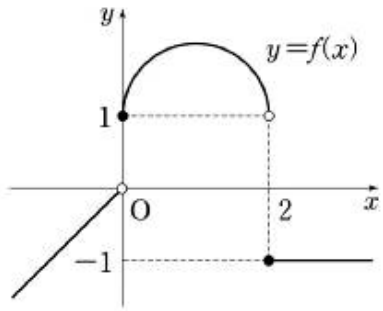
함수 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

46 (2015학년도 대수능 23번 [3점])

함수 $f(x)=\begin{cases}2x+10 & (x<1)\\ x+a & (x\geq 1)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

47 (2014학년도 6월 모의평가 11번 [3점])

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

48 (2015학년도 9월 모의평가 25번 [3점])

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(3x+2)(x-3)}{x-3} & (x\neq 3)\\ a & (x=3)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

개념 3 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 다음 함수도 그 구간에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)　　(2) $f(x) \pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$　　(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$)

Tip

연속함수의 성질을 이용하면 더 많은 연속함수들을 만들어 낼 수 있다!

☀보기

(1) 다항함수는 실수 전체에서 연속이다.

(2) 분수함수 $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($f(x), g(x)$는 다항함수)는 $g(x) \neq 0$에서 연속이다.

(3) 무리함수 $y = \sqrt{f(x)}$는 $f(x) \geq 0$에서 연속이다.

Tip **기필코 유형 접근법 - 복잡한 함수가 $x = a$에서 연속이 되는 조건(1)**

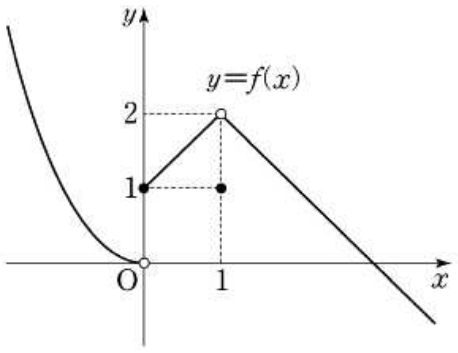
(1) 함수 $f(x)g(x)$가 $x = a$에서 연속이 되는 조건

⇨ $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$

(2) 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 불연속일지라도 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 = g(a)$이면, 함수 $f(x)g(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

기필코 유형 49 (2012학년도 대수능 18번 [4점])

함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.



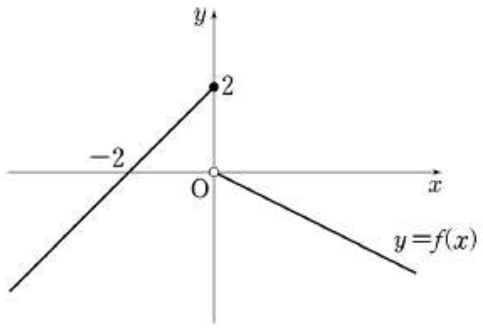


유형 정복

50 (2014학년도 6월 모의평가 13번 [3점])

$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.

함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?



51 (2014학년도 대수능 28번 [4점])



함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

52 (2013학년도 9월 모의평가 13번 [3점])

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} a & (x \le 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=1$

ㄴ. $a=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

53 (2013년 6월 모의평가 19번 [4점])

함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x| \ge 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다.

ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

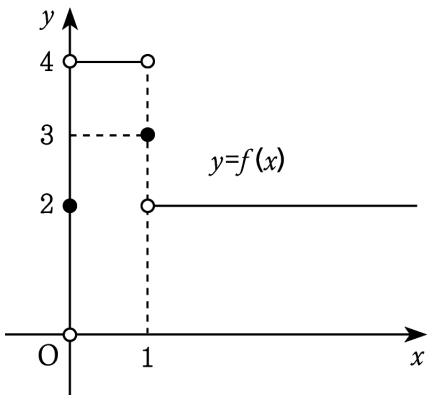
54 (2012학년도 9월 모의평가 20번 [4점])

함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$이라 하자.

함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

55 (2016학년도 6월 모의평가 29번 [4점] 변형)

함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.



56 (2013학년도 대수능 20번 [4점])

두 함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (|x| \ge 1) \\ 1 & (|x|<1) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (|x| \ge 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.



Tip **기필코 유형 접근법 - 복잡한 함수가 연속함수가 되는 조건(2)**

'x^n'을 포함한 함수

(1) $|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}$

(2) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}$

(3) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}$

(4) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}$

기필코 유형 57 (2014학년도 6월 모의평가 10번 [3점])

함수 $f(x)=\begin{cases}x+a & (x\le 1)\\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

IV

다항함수의 미분법

미분계수

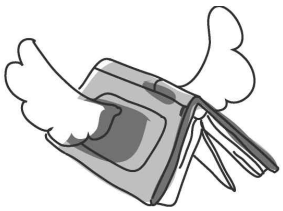
도함수

도함수의 활용



미적분I의 꽃은 단연 미분과 적분이다. 함수의 극한과 연속을 미분을 위해 배웠다고 해도 과언이 아닐 정도로 미분 단원의 출제 빈도는 각 유형과 개념별로 높게 나타난다. 특히, 미분계수의 정의부터 도함수의 활용까지 어느 것 하나 소홀히 할 수 없지만, 각 개념의 뜻과 관련된 대표 유형들을 정확하게 이해하고 있다면 반드시 맞출 수 있는 유형들이 반복해서 등장하고 있기 때문에 자신감을 가지고 개념 + 대표유형을 자신의 것으로 꼭 만들자 ^^

유형/개념	2012학년도			2013학년도			2014학년도			2015학년도			2016학년도		
	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능
미분계수의 정의	11		3	27	26	24	6		5	9	21		11		
다항함수의 미분법	24	26	3	22 27	26 29	24	6 23 26	23	5	9 23			11 23	23	
좌우미분계수						18			21					21	
접선		15	26		19 21	15	17			27	27		13		
증가 감소	15	18 27						21					27		
극대 극소	19						21		25	16	17	29	21	13	
최대 최소	21			13	19						27				
방정식 부등식				17 21				27	21			14 21	17 21		
속도 가속도				10						14					



1. 미분계수

미리 알고가기

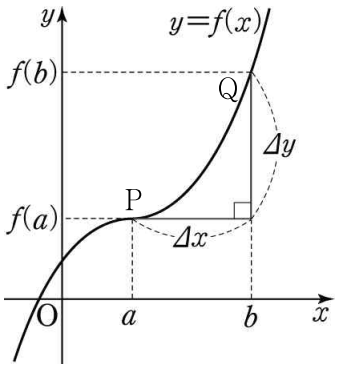
미분 단원에서 우리의 중요한 목표는 모든 다항함수의 그래프를 그리고 이를 활용하는 것! 그러기 위해서는 함수가 '언제 증가하고 감소하는지'를 알아야 한다. 이때 필요한 도구가 함숫값이 증가하거나 감소하는 것을 '수'로 표현하는 것! 이것이 바로 '미분계수'이다.

개념 1 평균변화율

구간 $[a, b]$에서

(1) x의 증분 : x의 값의 변화량 ⇨ $\Delta x = b-a$

(2) y의 증분 : y의 값의 변화량 ⇨ $\Delta y = f(b)-f(a)$



(3) x의 값이 $a \to b$로 변할 때의 평균변화율

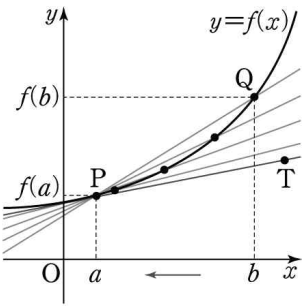
: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ⇦ $\overline{PQ}$의 기울기

$= \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

개념 2 미분계수(순간변화율)

(1) 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

: 극한값 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$이 존재



(2) $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$

: $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(3) 기하학적인 의미

: $y=f(x)$의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 $f'(a)$이다.



Tip 기필코 유형 접근법 - 미분계수의 다양한 표현

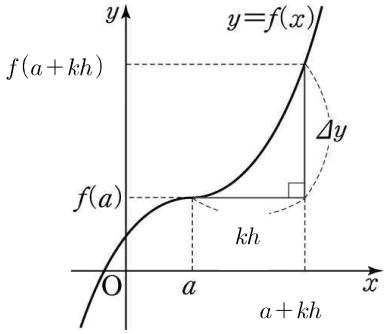
다항함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+k\times h)-f(a)}{k\times h}=f'(a)$ $(k\neq 0$인 상수$)$

(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+k\times h)-f(a)}{l\times h}=\dfrac{k}{l}\times f'(a)$ $(k,\ l\neq 0$인 상수$)$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면,

① $b=f(a)$ ② $c=f'(a)$ 이다.



기필코 유형 1 (2013학년도 9월 모의평가 26번 [4점] 변형)

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{h}$를 $f'(1)$을 이용하여 나타내시오.

기필코 유형 2 (2013학년도 6월 모의평가 27번 [4점] 변형)

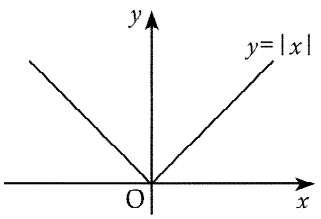
다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=9$를 만족한다. $f'(1)+f(1)$을 구하시오.

개념 3 미분가능성과 연속성

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
(왜?)

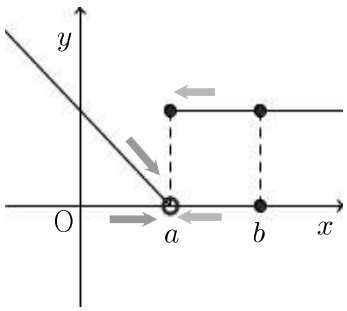
Tip
미분불가능한 점은 그래프에서
1) 뾰족한 점
2) 불연속인 점
3) 수직접선을 갖는 경우

(2) 역은 성립하지 않는다.
(반례) $y=|x|$

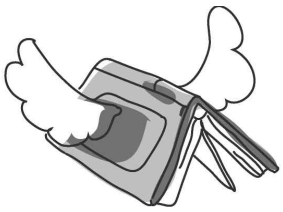


Tip
미분가능성은 '한 점'에서 따지는 개념이다. 즉, 함수 $y=|x|$는
1) $x=0$에서 미분 불가능이지만,
2) $x=1$에서는 미분가능하다.
3) $x\neq 0$에서는 미분가능하다.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분 불가능하다.
(왜?)





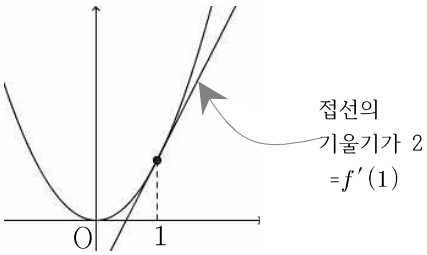


2. 도함수

미리 알고가기

미분계수는 실제로 어떻게 계산할까? 함수 $f(x)=x^2$에 대해 $x=1$에서의 미분계수를 구해보자.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$



개념 1 도함수

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

▸ 기호 : $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

보기) (1) 함수 $f(x)=x^2$의 도함수를 구하시오.

(2) $f'(x)=5x-2$일 때, $f'(2)$를 구하시오.

Tip

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 함숫값 $f'(a)$이다.

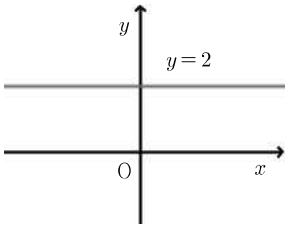
개념 2 함수 $f(x)=x^n$, $f(x)=c$의 도함수

(1) $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $f'(x)=nx^{n-1}$

(2) $f(x)=c$ (c는 상수)이면 $f'(x)=0$

Tip

상수함수 $f(x)=2$의 접선은 자기 자신이므로 접선의 기울기(=미분계수)는 0이다.



개념 3 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때

(1) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

(2) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(3) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

Tip

개념 2와 개념 3 덕분에 다항함수를 포함한 더 많은 함수의 미분을 쉽게 할 수 있게 된다!

기필코 유형 3 (2013학년도 6월 모의평가 22번 [3점])

함수 $f(x)=x^2+7x$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

개념 4 곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Tip

미분가능한 함수 $f(x)$에 대해

$[\{f(x)\}^n]'$

$=n\{f(x)\}^{n-1}\times f'(x)$

기필코 유형 4 (2012학년도 9월 모의평가 26번 [3점])

함수 $f(x)=(x^3+5)(x^2-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

Tip

$\{f(x)g(x)h(x)\}'$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)$

$+f(x)g(x)h'(x)$





유형 정복

유형① 다항함수의 미분법

5 (2012학년도 6월 모의평가 24번 [3점])

이차함수 $f(x)=x^2+3x$에 대하여 $f(2)+f'(2)$의 값을 구하시오.

6 (2014학년도 6월 모의평가 23번 [3점])

함수 $f(x)=5x^2+3x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

7 (2015학년도 6월 모의평가 23번 [3점])

함수 $f(x)=x^2+x+3$에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

8 (2014학년도 9월 모의평가 23번 [3점])

함수 $f(x)=7x^3-ax+3$에 대하여 $f'(1)=2$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

9 (2016학년도 9월 모의평가 23번 [3점])

함수 $f(x)=x^2-2x-12$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오.

10 (2016학년도 6월 모의평가 23번 [3점])

함수 $f(x)=x^3+10x$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

11 (2014학년도 6월 모의평가 26번 [4점])

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 기울기가 2이다.

$g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오.

유형② 미분계수의 정의 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+k\times h)-f(a)}{k\times h}=f'(a) \quad (k\neq 0)$

12 (2012학년도 대수능 3번 [2점])

함수 $f(x)=x^2+5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은?

13 (2014학년도 대수능 5번 [3점])

함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$일 때, 상수 a의 값은?

14 (2016학년도 6월 모의평가 11번 [3점])

함수 $f(x)=x^2+8x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값은?

15 (2013학년도 9월 모의평가 26번 [4점])

함수 $f(x)=x^3+4x-2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$의 값을 구하시오.

16 (2014학년도 6월 모의평가 6번 [3점])

함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은?

17 (2015학년도 6월 모의평가 9번 [3점])

함수 $f(x)=x^2+4x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$의 값은?



유형③ 미분계수의 정의 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=k$**(상수)** ⇨ $f(a)=b,\ f'(a)=k$

18 (2012학년도 6월 모의평가 11번 [3점])

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=3$일 때, $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

19 (2013학년도 6월 모의평가 27번)

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=9$를 만족시킨다. $g(x)=xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

20 (2013학년도 대수능 24번 [3점])

함수 $f(x)=x^3+9x+2$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

21 (2014학년도 6월 모의평가 9번 [3점])

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?

22 (2015학년도 9월 모의평가 21번 [4점])

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

㈎ $f(0)=-3$
㈏ 모든 양의 실수 x에 대하여
$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$이다.

Tip 기필코 유형 접근법

$x=a$에서의 미분계수가 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이 되기 위해서는

① 좌·우 극한이 각각 존재하고

② $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 만족해야 한다.

기필코 유형 23 (2013학년도 대수능 18번 [4점])

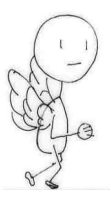
함수 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax & (x<1)\\ bx^2+x+1 & (x\geq 1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

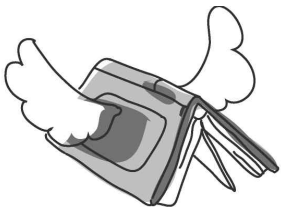
기필코 유형 24 (2016학년도 9월 모의평가 21번 [4점] 변형)

함수 $f(x)=x^4-4x^3+10x-30$에 대해 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$을 구하시오.

기필코 유형 25 (2014학년도 대수능 21번 [4점] 변형)

함수 $g(t)=\left|-2t^3-at^2\right|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.





3. 도함수의 활용

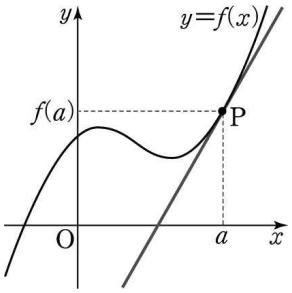
미리 알고가기

드디어 함수의 그래프의 개형(모양)을 그리기 위한 중요한 도구인 도함수를 배웠다. 이제 이 도함수의 다양한 활용을 살펴보자.

개념 1 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식

: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$



Tip

기울기가 m이고 한 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 방정식

: $y=m(x-a)+f(a)$

기필코 유형 26 (2012학년도 대수능 26번 [4점])

곡선 $y=-x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$이다. $10a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)

Tip

접선을 $f(x)=ax+b$라고 두면 $10a+b=f(10)$이다.

기필코 유형 27 (2014학년도 6월 모의평가 17번 [4점] 변형)

곡선 $y=3x^2-4x$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 2일 때, 점 A에서의 접선의 방정식을 구하시오.

기필코 유형 28 (2012학년도 9월 모의평가 15번 [4점] 변형)

점 $(-3, 2)$에서 곡선 $y=-x^2-4x-5$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.





유형 정복

29 (2012학년도 6월 모의평가 27번 [4점])

곡선 $y=x^3-x^2+a$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선이 점 $(0, 12)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

30 (2013학년도 대수능 15번 [4점])

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+3$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

31 (2015학년도 6월 모의평가 27번 [4점])

곡선 $y=-x^3+2x$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선이 점 $(-10, a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

32 (2016학년도 6월 모의평가 13번 [3점])

함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)=(x-3)^2$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편이 -5일 때, 이 접선의 x절편은?

33 (2012학년도 9월 모의평가 15번 [4점])

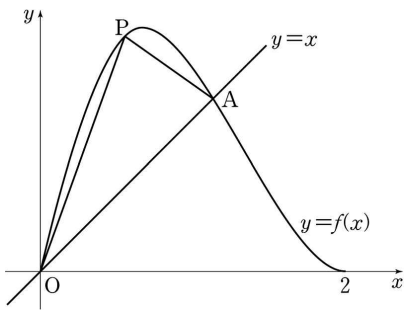
점 $(0, -4)$에서 곡선 $y=x^3-2$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, a의 값은?

34 (2014학년도 6월 모의평가 17번 [4점])

곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

35 (2013학년도 9월 모의평가 19번 [4점])

닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)=ax(x-2)^2$ $\left(a>\frac{1}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?



36 (2015학년도 9월 모의평가 27번 [4점])

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.



Tip **기필코 유형 접근법 - 접선의 방정식 변형 문제**

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 점 $(a, f(a))$에서 접한다.
⇨ 점 $(a, f(a))$에서 접선의 기울기가 같다 : $f'(a)=g'(a)$
⇨ 함숫값이 같다 : $f(a)=g(a)$

기필코 유형 37 (2013학년도 9월 모의평가 21번 [4점] 변형)

좌표평면에서 함수 $f(x)=6x^3-x$의 그래프가 $g(x)=x+a$ 또는 $h(x)=-x+b$에 각각 접하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 모두 구하여라.

개념 2 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 a, b에 대하여
(1) $a<b$일 때, $f(a)<f(b) \Rightarrow f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다.
(2) $a<b$일 때, $f(a)>f(b) \Rightarrow f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다.

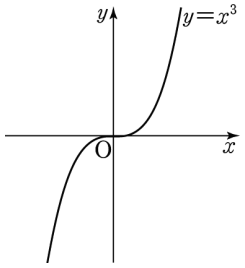
개념 3 도함수를 이용한 증가와 감소 판정법

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여
(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

보기) 함수 $f(x)=x^3-3x^2$이 증가하는 구간과 감소하는 구간을 구하여라.

Tip

개념 3의 역은 성립하지 않는다.



위 함수는 실수전체에서 증가하지만,
$f'(0)=0$이므로 항상
$f'(x)>0$은 아니다.
사실 위 함수는 모든 실수에서
$f'(x) \geq 0$이다.

Tip **기필코 유형 접근법**

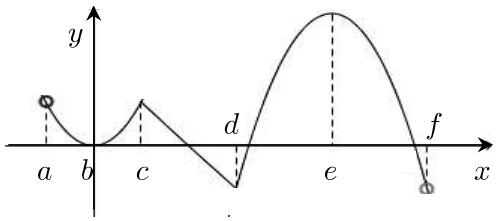
(1) "함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 증가하도록" 하는 조건
⇨ $f'(x) \geq 0$
(2) "함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 감소하도록" 하는 조건
⇨ $f'(x) \leq 0$

기필코 유형 38 (2012학년도 9월 모의평가 18번 [4점])

모든 실수 x에 대해 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$가 증가하도록 하는 상수 a의 최댓값을 구하시오.

개념 4 함수의 극대와 극소

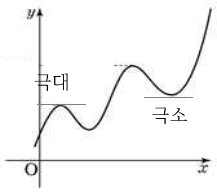
(1) $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.
(2) $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \geq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.
(3) 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



⇨ 열린 구간 (a, f)에서
▸ 극솟값 : $f(b)$, $f(d)$ ▸ 극댓값 : $f(c)$, $f(e)$

Tip
극대 극소의 정의가 어렵게 느껴진다면☹ 그래프로 이해하자.

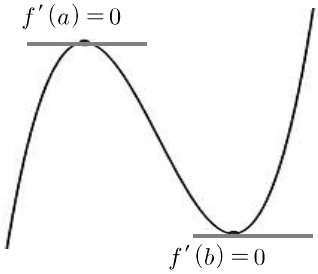
Tip
극댓값이 극솟값보다 항상 크지는 않다.





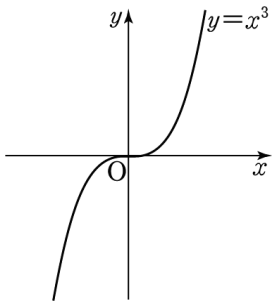
개념 5 도함수를 이용한 극값의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$



Tip

$f'(a)=0$이 되는 $x=a$가 극값의 "후보들"이 된다. 버뜨, 역은 성립하지 않는다.
(즉, $f'(0)=0$이지만 극값이 아닐 수 있다.)

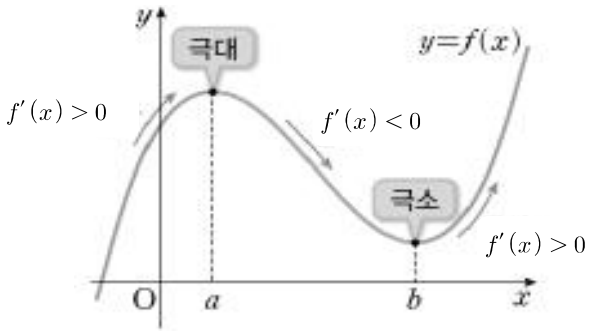


개념 6 도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 가진다.

② $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 가진다.

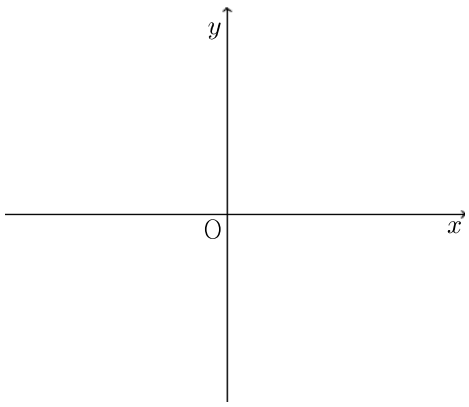


Tip

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값(극댓값) b를 갖게 되면,
⇨ ① $f'(a)=0$
② $f(a)=b$
를 만족한다.

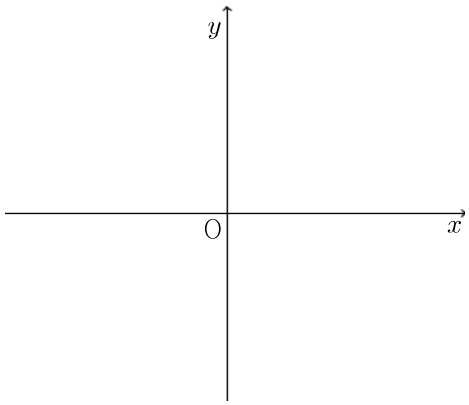
☀보기) 함수의 증감표를 이용하여 삼차함수 $y=2x^3-3x^2-12x$의 그래프의 개형을 그리시오.

x					
f'					
f					



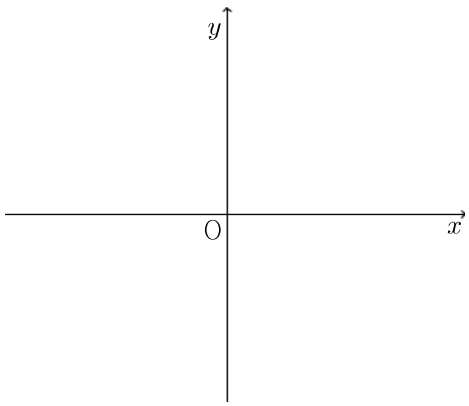
☀보기) 함수의 증감표를 이용하여 삼차함수 $y=(x-1)^3$의 그래프의 개형을 그리시오.

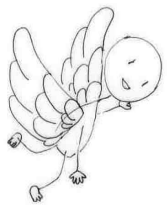
x					
f'					
f					



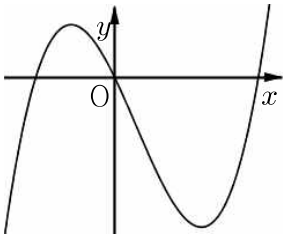
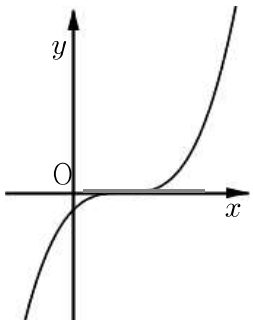
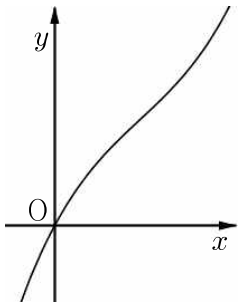
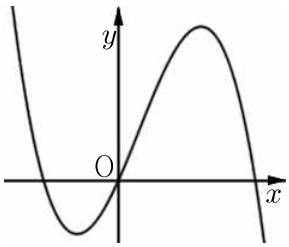
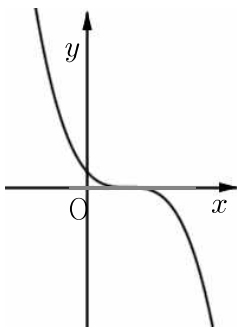
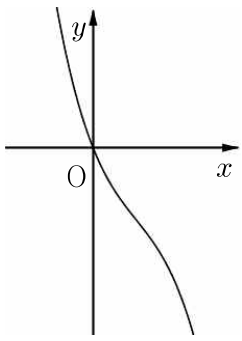
☀보기) 함수의 증감표를 이용하여 삼차함수 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$의 그래프의 개형을 그리시오.

x					
f'					
f					

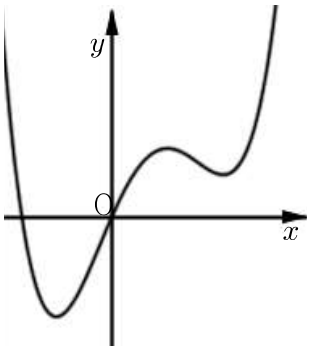
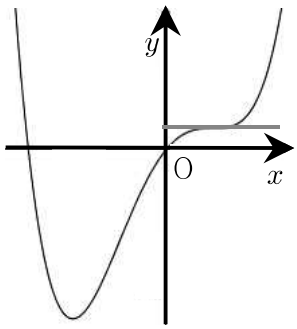
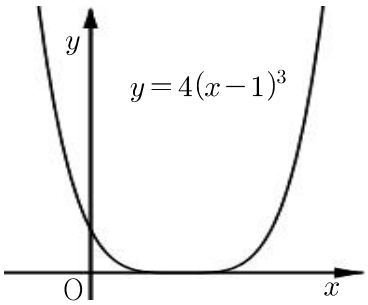
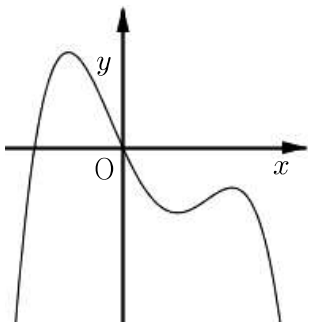
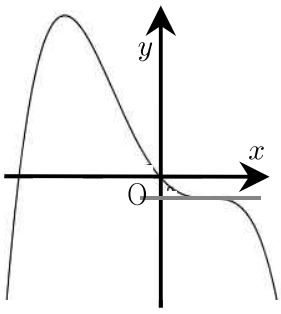
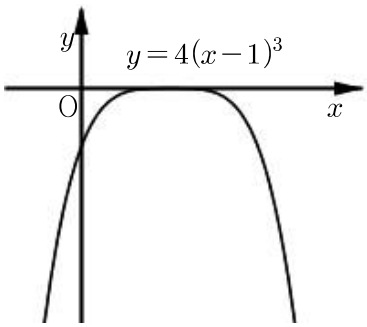




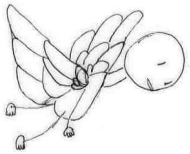
삼차함수

① $y=2x^3-3x^2-12x$	② $y=(x-1)^3$	③ $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$
$y'=6(x^2-x-2)$ $=(x-2)(x+1)$ 극값 2개	$y'=3(x-1)^2$ ≥ 0 극값 없음	$y'=x^2-2x+2$ $=(x-1)^2+1>0$ 극값 없음
		
① $y=-2x^3+3x^2+12x$	② $y=-(x-1)^3$	③ $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-2x$
$y'=-6(x^2-x-2)$ $=-6(x-2)(x+1)$ 극값 2개	$y'=-3(x-1)^2\leq 0$ 극값 없음	$y'=-x^2+2x-2$ $=-\{(x-1)^2+1\}<0$ 극값 없음
		

사차함수

④ $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x$	⑤ $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$	⑥ $y=(x-1)^4$	⑦ $y=\frac{1}{4}x^4-x$
$y'=x^3-2x^2-x+2$ $=(x+1)(x-1)(x-2)$ 극값 3개	$y'=(x+2)(x-1)^2$ 극값 1개	$y'=4(x-1)^3$ 극값 1개	$y'=x^3-1$ 극값 1개
			
④ $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$	⑤ $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^3-2x$	⑥ $y=-(x-1)^4$	⑦ $y=-\frac{1}{4}x^4+x$
$y'=-(x^3-2x^2-x+2)$ $=-(x+1)(x-1)(x-2)$ 극값 3개	$y'=-(x+2)(x-1)^2$ 극값 1개	$y'=-4(x-1)^3$ 극값 1개	$y'=-x^3+1$ 극값 1개
			

★ $f'(x)=0$의 서로 다른 해의 개수에 따라 그래프의 모양이 결정된다! ($f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)=0$의 해의 개수는 판별식을 이용한다!)



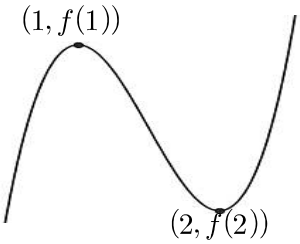
다항함수의 그래프 그리기

(1) 증감표를 그린다. : 증가, 감소, 극댓값, 극솟값 찾기

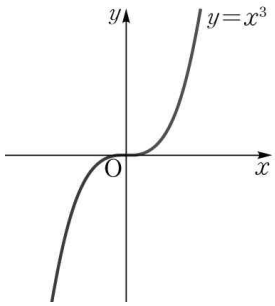
(2) x절편, y절편을 구한다. : $(a, 0)$, $(0, b)$인 점 찾기

삼차함수의 그래프 개형 꿰뚫기!

(1) $f'(x)=(x-1)(x-2)$처럼
$f'(x)=0$의 서로 다른 해가 2개이면
그림처럼 극대 1개, 극소 1개 있다.



(2) $f'(x)=x^2$처럼
$f'(x)=0$의 해가 1개 (중근)
이면 극점은 없고 계속 증가만 하거나(최고차항 계수>0인 경우) 계속 감소만 한다.
(최고차항 계수<0인 경우)

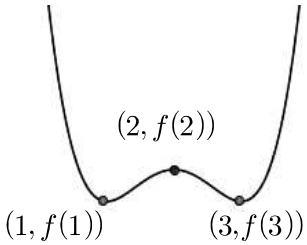


(3) $f'(x)\neq 0$이면 함수는 모든 실수에서 $f'(x)>0$(실수 전체에서 증가) 이거나, 모든 실수에서 $f'(x)<0$(실수 전체에서 감소)이다.

사차함수의 그래프 개형 꿰뚫기!

(1) $f'(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$처럼 $f'(x)=0$의 서로 다른 해가 3개 이면 그림처럼 극대와 극소가 되는 점이 총 3개이다.

(2) $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$처럼 $f'(x)$가 $(x-1)^2$같은 완전제곱식을 갖고 있으면 그 점에서 $f'(1)=0$이지만, 절대 극대나 극소가 될 수 없다! 버뜨, $x=2$에서만 극값을 갖는다.



(3) $f'(x)=(x-1)^3$처럼 $f'(x)$가 세제곱식으로 표현되면 $f'(x)=0$의 유일한 해인 $x=1$ 에서만 유일한 극값을 갖는다.

(4) $f'(x)=(x-1)(x^2+x+1)$처럼 $f'(x)$가 중근이 아닌 유일한 실근을 가지면 $f'(x)=0$의 유일한 해인 $x=1$에서만 극값을 갖는다.

Tip

미분 단원의 3~4점 문제들은 미분의 활용에서 많이 출제된다. 특히, 이러한 문제들은 다항함수의 그래프를 그릴 줄 알아야 해결이 된다.

또한,
삼차, 사차함수의 기본적인 14개의 개형을 아는 것이 문제 해결의 핵심이다!

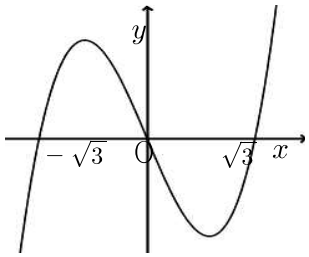
다항함수의 그래프 그리기 방법으로 다음 장에 나오는 기본적인 그래프 유형을 그려보는 연습을 하고 그래프 개형을 머릿속에 넣어두자☺

그래프의 **[14종류 기본개형]**을 알면, 증감표 없이 그래프를 좀 더 빨리 그릴 수 있다. ☺

삼차함수의 그래프 빨리 그리는 방법 - [$y=x^3-3x$의 그래프를 그려보자.]

방법1] 미분하지 않고 인수분해 이용하기

⇨ $y=x(x^2-3)=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로 x절편이 $0, \pm\sqrt{3}$이다. 즉, 삼차함수의 그래프가 x축 위 3개의 점 $(-\sqrt{3},0),(0,0),(\sqrt{3},0)$을 지나야 하므로 **[14종류 기본개형]**에서 ①에 해당하고 최고차항이 양수이므로 오른쪽 그림처럼 그려진다.

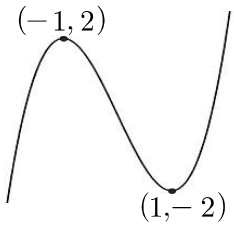


방법2] $y'=3(x-1)(x+1)$이므로 극값이 2개이고 이는 **[14종류 기본개형]**에서 ①에 해당하며 최고차항이 양수이므로 아래 그림처럼 그려진다.

방법3] 미분하여 증감표 이용하기

⇨ $y'=3(x-1)(x+1)$이므로 증감표와 그래프는 같다.

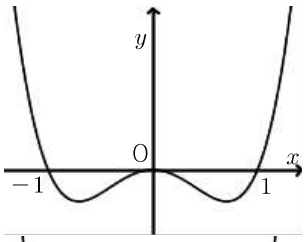
x		-1		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$f(-1)=2$	↘	$f(1)=-2$	↗



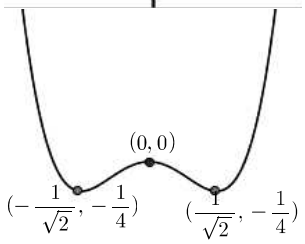
사차함수의 그래프 빨리 그리는 방법 - [$y=x^4-x^2$의 그래프를 그려보자.]

방법1] 미분하지 않고 인수분해 이용하기

⇨ $y=x^4-x^2=x^2(x-1)(x+1)$이고, x축 위 3개의 점 $(-1,0),(0,0),(1,0)$을 지나야 하므로 **[14종류 기본개형]**에서 ④에 해당한다. 이때, x^2항 때문에 $(0,0)$에서 접한다.



방법2] $y'=4x(x^2-\frac{1}{2})=4x(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}})$이므로 이는 **[14종류 기본개형]**에서 ④에 해당하며 최고차항이 양수이므로 오른쪽 그림처럼 그려진다.



방법3] 미분하여 증감표 이용하기

⇨ $y'=4x(x^2-\frac{1}{2})=4x(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}})$이므로 증감표는 아래와 같다.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

⇨ [방법1]은 함수식이 인수분해가 쉽게 될 때 사용 가능하다는 제한점이 있다





유형 정복

유형① 함수의 증가와 감소

39 (2012학년도 6월 모의평가 15번 [4점])

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

40 (2012학년도 9월 모의평가 18번 [4점])

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?

41 (2016학년도 6월 모의평가 27번 [4점])

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a,a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오.

42 (2014학년도 9월 모의평가 21번 [4점])

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,0)$에서 감소하고 구간 $(2,\infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a,b의 순서쌍(a,b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

43 (2014학년도 대수능 25번 [3점])

함수 $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

44 (2015학년도 6월 모의평가 16번 [4점])

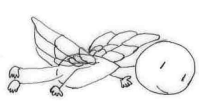
함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+a$의 극댓값이 10일 때, 상수 a의 값은?

45 (2015학년도 대수능 29번 [4점])

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=(x^3+2)f(x)$를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

46 (2014학년도 6월 모의평가 21번 [4점])

함수 $f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

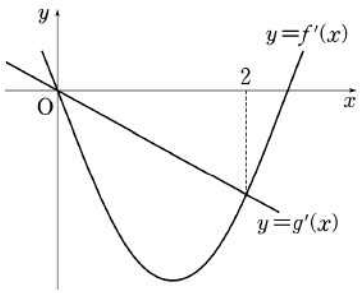


47 (2015학년도 9월 모의평가 17번 [4점])

함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 모든 극값의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은?

48 (2012학년도 6월 모의평가 19번 [4점] 변형)

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



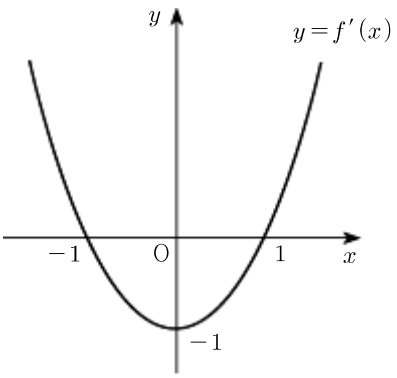
<보 기>

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

49 (2016학년도 9월 모의평가 13번 [3점])

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이고, $g(x)=f(x)-kx$가 $x=-3$에서 극값을 가질 때, 상수 k의 값은?



50 (2016학년도 9월 모의평가 21번 [4점])

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$y=x^4-4x^3+10x-30$, $y=2x+2$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$을 만족시키는

모든 실수 t의 값의 합은?

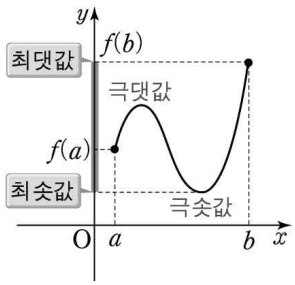
개념 7 함수의 최댓값과 최솟값

구간 $[a, b]$에서의 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값 구하기

: $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서

(1) 가장 큰 값이 최댓값,

(2) 가장 작은 값이 최솟값이다.



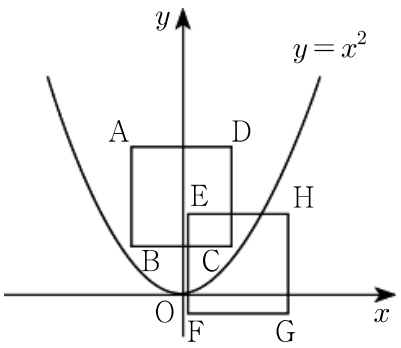
최대 최소 정리)
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

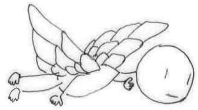
기필코 유형 51 (2013학년도 6월 모의평가 13번 [3점])

닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은?

기필코 유형 52 (2012학년도 6월 모의평가 21번 [4점])

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0,1)$이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.)



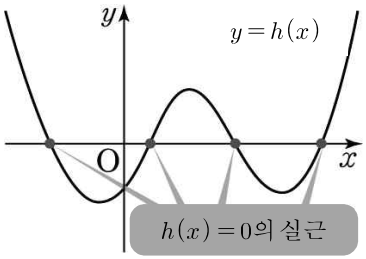


개념 8 방정식에의 활용

(1) $f(x)=k$의 근의 개수
: $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 그래프의 교점의 개수가 방정식 $f(x)=k$의 근의 개수이다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 근의 개수
: $h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 $y=h(x)$의 그래프를 이용하여 $h(x)=0$의 방정식의 해의 개수를 구한다.

Tip
방정식 $h(x)=0$의 해의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축($y=0$)이 만나는 교점의 개수이다.



기필코 유형 53 (2016학년도 6월 모의평가 17번 [4점])

두 함수 $f(x)=3x^3-x^2-3x$, $g(x)=x^3-4x^2+9x+a$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

Tip 기필코 유형 접근법

$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 접점 $(a, f(a))$가 아닌 점 $(b, f(b))$에서 만나면,
⇨ $f(x)=g(x)$는 $(x-a)^2(x-b)$를 인수로 갖는다.

기필코 유형 54 (2014학년도 9월 모의평가 27번 [4점])

곡선 $y=x^3+2x+7$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$에서의 접선이 점 P가 아닌 점 (a, b)에서 곡선과 만난다. $a+b$의 값을 구하시오.

개념 9 부등식에의 활용

(1) 어떤 구간에서 $f(x) \geq 0$이 성립하기 위해서는 이 구간에서 함수 $[f(x)$의 최솟값 $\geq 0]$임을 보이면 된다.

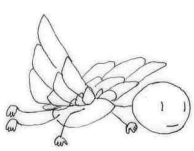
(2) 어떤 구간에서 $f(x) \geq g(x)$가 성립하기 위해서는 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 $h(x) \geq 0$임을 보인다. 즉, 그 구간에서 $[h(x)$의 최솟값 $\geq 0]$임을 보이면 된다.

☀보기) 모든 실수 x에 대해 $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x \geq a$를 만족하는 실수 a의 최댓값을 구하여라.

☀보기) $x \geq 0$에서 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 \geq 2x-a$를 만족하는 정수 a의 최솟값을 구하여라.

Tip

부등식 $f(x) \geq 0$은 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 그 위에 놓이는 것을 의미한다.

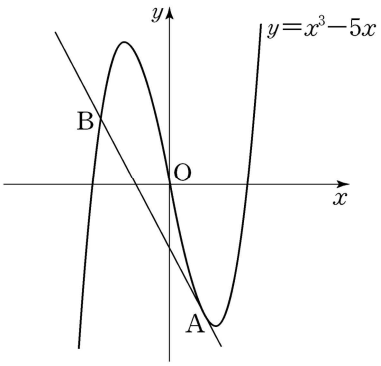




유형 정복

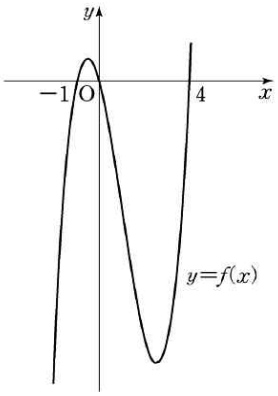
55 (2013학년도 6월 모의평가 17번 [4점])

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?



56 (2015학년도 대수능 14번 [4점])

직선 $y=5x+k$와 함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?



57 (2014학년도 대수능 21번 [4점])

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$f(3)$의 값은? (단, $a,\ b$는 실수이다.)

㈎ $f(1)=2$
㈏ 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

58 (2012학년도 대수능 21번 [4점])

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?

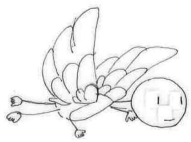
59 (2016학년도 6월 모의평가 21번 [4점])

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자. a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?

60 (2015학년도 대수능 21번 [4점])

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

㈎ $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
㈏ $f(0)=f'(0)$
㈐ $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.



개념 10 속도와 가속도

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라 할 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad a(t)=\frac{dv}{dt}=v'(t)$$

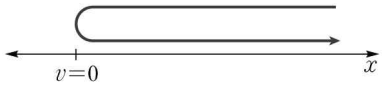
기필코 유형 61 (2015학년도 6월 모의평가 14번 [4점])

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^2+4t$이다. $t=a$에서 점 P의 속도가 0일 때, 상수 a의 값은?

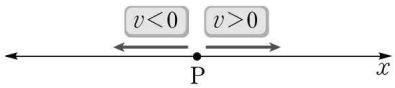
Tip 기필코 유형 접근법

움직이는 물체(움직이는 점 P)가

(1) 운동 방향을 바꾼다 ⇨ 속도가 0이다.



(2) 반대 방향으로 움직인다. ⇨ 속도의 부호가 반대이다.



(3) 수직선 위를 움직이는 물체가 다시 원점을 지난다. ⇨ 위치=0

(4) 지상에서 던져 올린 공이 다시 지면에 떨어지는 순간 ⇨ 위치=0인 시각

(5) 지상에서 던져 올린 공이 최고 높이에 도달하는 시각 ⇨ 속도=0인 시각

☀보기) 지상에서 $10m/s$의 속도로 똑바로 위로 던져 올린 공의 t초 후의 높이 xm가 $x=10t-5t^2$일 때, 공이 최고 높이에 도달하는 시각과 그때의 높이를 구하시오.

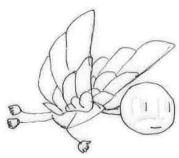
기필코 유형 62 (2013학년도 6월 모의평가 10번 [3점])

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t의 범위는?

V

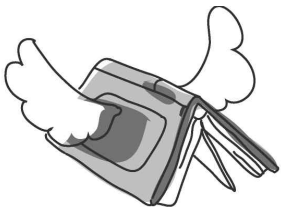
다항함수의 적분법

부정적분
정적분
정적분의 활용



부정적분은 미분의 역연산으로 정의하고 정적분은 넓이 개념으로 정의된다. 이때, 부정적분과 정적분의 관계를 정확히 이해하고 있어야 하고 관계부터 정적분의 활용까지 다양하게 문제가 출제되고 있다. 그렇지만! 개념을 정확히 이해하고 나면 문제의 활용도는 미분만큼 다양하지 않으니, 부정적분과 정적분 단원의 문제는 고득점까지 충분히 가져갈 수 있다는 자신감을 가지고 열심히 하자 ^^

유형/개념	2012학년도			2013학년도			2014학년도			2015학년도			2016학년도		
	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능	6월	9월	대수능
부정적분					18							26		10 14	
정적분의 계산			19 24			11 28		5	23		6	6			
미분과 적분사이 관계			9			21		28			26			25	
정적분의 성질		13	19 27		23	11 28			23			20			
정적분과 무한급수									29		14				
넓이		10			29	28		13	8			20		14	
속도 가속도		21													



1. 부정적분

미리 알고가기

$(x^3)'=3x^2$, $(x^3+2)'=3x^2$, $(x^3-100)'=3x^2$…과 같이 어떤 함수를 미분하여 $3x^2$이 되는 함수는 매우 많고, 이들은 상수항만 다르다. x^3, x^3+2, x^3-100과 같이 미분하면 $3x^2=f(x)$가 되는 함수들을 $f(x)$의 부정적분이라고 한다. 이러한 부정적분이라는 함수가 나중엔 $f(x)$와 x축 사이의 넓이를 구하는데 사용된다.

개념 1 부정적분

(1) $F'(x)=f(x)$일 때, 함수 $f(x)$의 부정적분은

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수) 이다.

(2) 함수 $f(x)=x^n\,(n=0,1,2,\cdots)$의 부정적분

$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

Tip

함수 $f(x)$의 부정적분은 $F'(x)=f(x)$인 모든 함수 $F(x)$들을 모아 놓은 것이다.

$$x^3+C\ (C\text{상수}) \xrightarrow{\text{미분}} 3x^2 \xrightarrow{\text{적분}} x^3+C\ (C\text{상수})$$

개념 2 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 존재할 때

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

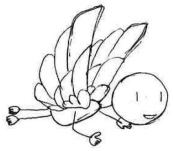
개념 3 미분과 부정적분 사이 관계

(1) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$

(2) $\int\frac{d}{dx}f(x)\,dx=f(x)+C\neq f(x)$ (단, C는 적분상수)

Tip

미분과 적분의 순서를 바꿀 수 없다.



기출필수코!



유형 정복

1 (2015학년도 대수능 26번 [4점] 변형)

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=6x^2+4$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,6)$을 지날 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

2 (2013학년도 9월 모의평가 18번 [4점])

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx, f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

3 (2016학년도 9월 모의평가 14번 [4점] 변형)

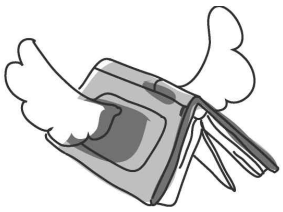
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이고 $f(0)=0$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

4 (2016학년도 9월 모의평가 10번 [3점])

함수 $f(x)$가

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

이고 $f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값은?



2. 정적분

개념 1 구분구적법

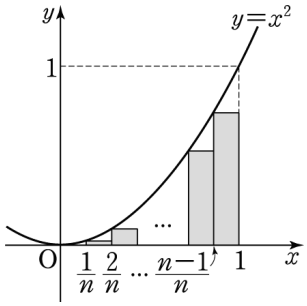
⇨ 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 잘게 나누어 이미 알고 있는 간단한 도형의 넓이 또는 부피의 합으로 어림한 값을 구하고, 이 어림한 값의 극한값으로 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법

예) 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 각 소구간을 밑변으로 하고,

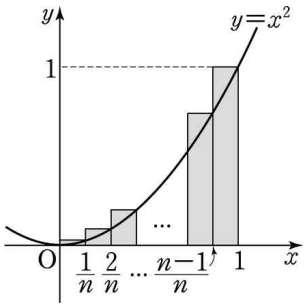
① 곡선 $y=x^2$의 아래에 완전히 포함되는 가장 큰 직사각형들의 넓이의 합을 A_n이라고 하면

$$A_n=\frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2\}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$



② 곡선 $y=x^2$을 포함하는 가장 작은 직사각형들의 넓이의 합을 B_n이라고 하면

$$B_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$



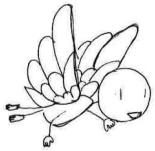
이때, 구하는 도형의 넓이를 S라고 하면 $A_n<S<B_n$이고,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$ 이다.

따라서 구하는 넓이는 $S=\frac{1}{3}$이다.

함수 $f(x)$가 연속함수인 경우에는 A_n과 B_n 중 어느 하나의 극한값이 존재하면 다른 하나의 극한값도 반드시 존재하고, 또 두 극한값이 일치한다. 따라서 A_n이나 B_n 중 어느 하나의 극한값으로 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있다.

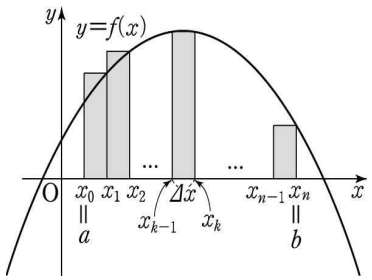


개념 2 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ \ x_k = a + k\Delta x\right)$$



☀보기) 정적분의 정의에 의하여 $\int_0^2 x^2\,dx$의 값을 구하여라.

Tip

(1)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(3)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(4) 함숫값이 음수이면 정적분 값도 음수가 나올 수 있다.

개념 3 정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (\text{단, } a < x < b)$$

Tip

$\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 부정적분 중 하나이다.

기필코 유형 5 (2012학년도 대수능 9번 [3점])

함수 $F(x) = \int_0^x (t^3 - 1)dt$에 대하여 $F'(2)$의 값은?

개념 4 미적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(왜?)

Tip

(1) 미적분의 기본정리 덕분에 '부정적분 $F(x)$'를 이용하여 정적분 $\int_a^b f(x)dx$을 간단히 계산할 수 있게 된다!

(2) 미적분의 기본 정리는 a, b의 대소에 관계없이 성립한다.

기필코 유형 6 (2015학년도 9월 모의평가 6번 [3점])

$\int_0^1 3x^2$의 값은?

기필코 유형 7 (2012학년도 대수능 24번 [3점])

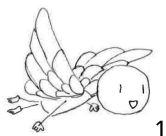
$\int_0^5 (4x-3)dx$의 값을 구하시오.

기필코 유형 8 (2014학년도 9월 모의평가 5번 [3점])

$\int_0^1 (4x^3+a)dx = 8$일 때 상수 a의 값은?

기필코 유형 9 (2015학년도 대수능 6번 [3점])

$\int_0^1 (2x+a)dx = 4$일 때, 상수 a의 값은?



Tip **기필코 유형 접근법** - 정적분으로 표시된 함수의 극한

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt =$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt =$

Tip **기필코 유형 접근법** - 정적분으로 표시된 함수

(1) $\int_a^x f(t)dt$를 포함하는 함수 ⇨ ① $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=0$

② $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) $g(x)=f(x)+\int_a^b f(t)dt$ ⇨ $\int_a^b f(t)dt = k$(k는 상수)로 놓는다.

(3) $\int_a^x (x-t)f(t)dt = g(x)$ ⇨ $\int_a^x (x-t)f(t)dt = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$로 놓고 양변을 x에 관해 미분한다.

기필코 유형 10

(2016학년도 9월 모의평가 25번 [3점])

함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$이고 $f'(2)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.



유형 정복

11 (2014학년도 9월 모의평가 28번 [4점])

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$일 때, $f(0)=a$

라 하자. $60a$의 값을 구하시오.

12 (2015학년도 9월 모의평가 26번 [4점])

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_0^x f(t)dt = x^3 + 4x$를 만족시킬 때,

$f(10)$의 값을 구하시오.

13 (2013학년도 대수능 21번 [4점])

삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$에 대하여 함수

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록

하는 양수 a의 최솟값은?

개념 5 정적분의 성질

구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Tip

(4)에서 c의 값은 뭐든지 상관 없다. 예를 들어,

$\int_3^7 f(x)dx$
$= \int_3^{10} f(x)dx + \int_{10}^7 f(x)dx$

(4)는 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$\int_1^{10} f(x)dx$
$-\int_1^7 f(x)dx = \int_7^{10} f(x)dx$

기필코 유형 14 (2012학년도 9월 모의평가 13번 [4점])

모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx = 3\int_0^1 f(x)dx$

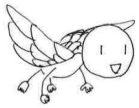
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$

ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

개념 6 함수의 대칭성에 따른 정적분의 계산

	y축 대칭	원점 대칭
정의	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$
예	짝수차 항과 상수항 만으로 구성된 다항함수 : $y=3,\ y=7x^2,\ y=2x^4-5x^2+10$	홀수차 항으로만 구성된 다항함수 : $y=x,\ y=x^3,\ y=2x^3-5x$
정적분의 성질	(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=$	(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=$
	(2) $\int_{-a}^{0} f(x)dx=$	(2) $\int_{-a}^{0} f(x)dx=$

☀보기) $\int_{-2}^{2}(100x^5+5x^4-x^3+6x^2-7x+1)dx$의 값을 구하시오.





유형 정복

15 (2013학년도 9월 모의평가 23번 [3점])

$\int_{-2}^{2} x(3x+1)dx$의 값을 구하시오.

16 (2014학년도 대수능 23번 [3점])

실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\frac{1}{4}$일 때, $50a$의 값을 구하시오.

17 (2013학년도 대수능 11번 [3점])

함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$일 때,

상수 k의 값은?

18 (2013학년도 대수능 28번 [4점] 변형)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$f(3)=0$이고, $\int_{0}^{2013}f(x)dx=\int_{3}^{2013}f(x)dx$를

만족시킬 때, $\int_{0}^{3}f(x)dx$를 구하시오.

19 (2012학년도 대수능 19번 [4점])

이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

20 (2012학년도 대수능 27번 [4점] 변형)

구간 $[0,1]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$\int_{0}^{1}f(x)dx=1$과 $\int_{0}^{1}xf(x)dx=\frac{1}{4}$를 만족한다. $\int_{0}^{1}(ax+5)f(x)dx=10$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

개념 7 정적분과 무한급수의 관계

무한급수 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 꼴은 정적분으로 바꾸어 계산한다.

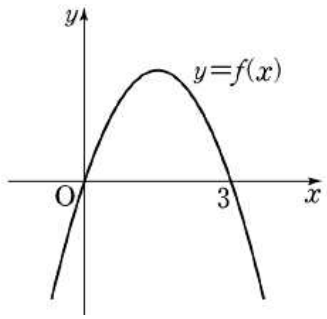
이때, 정적분으로 바꾸는 방법은 x_k를 무엇으로 두느냐에 따라 3가지가 있다.

기필코 유형 21 (2014학년도 대수능 29번 [4점])

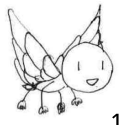
함수 $f(x)=3x^2-ax$가 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

기필코 유형 22 (2015학년도 9월 모의평가 14번 [4점])

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{7}{6}$일 때, $f'(0)$의 값은?



무한급수

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 를

정적분으로 바꾸기

(1) $x_k = a+\frac{b-a}{n}k$로 두면

⇨ 적분 구간은 $[a, a+(b-a)]=[a,b]$, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$이다.

⇨ $n\to\infty$이면 $x_k\to x$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\to\int$, $\Delta x\to dx$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

무한급수

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2}{n}k\right)\frac{2}{n}$ 를

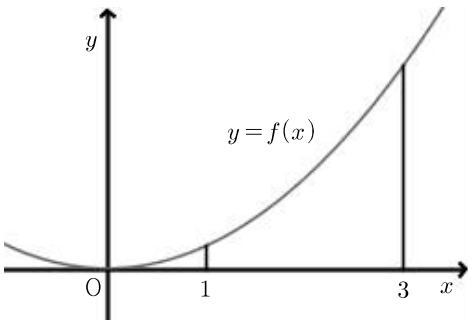
정적분으로 바꾸기

(1) $x_k = 1+\frac{2}{n}k$ 로 두면

⇨ 적분 구간은 $[1, 1+2]=[1,3]$, $\Delta x=\frac{2}{n}$

⇨ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2}{n}k\right)\frac{2}{n} = \int_1^3 f(x)\,dx$

그래프로 보기



(2) $x_k = \dfrac{b-a}{n}k = 0 + \dfrac{b-a}{n}k$로 두면

⇨ 적분 구간은 $[0, 0+(b-a)] = [0, b-a]$,

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$이다.

⇨ $n \to \infty$이면 $x_k \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \to \int$, $\Delta x \to dx$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = \int_0^{b-a} f(a+x)\,dx$$

(3) $x_k = \dfrac{1}{n}k = 0 + \dfrac{1}{n}k$로 두면

⇨ 적분 구간은 $[0, 0+1] = [0, 1]$, $\Delta x = \dfrac{1}{n}$이다.

⇨ $n \to \infty$이면 $x_k \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \to \int$, $\Delta x \to dx$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx$$

(2) $x_k = \dfrac{2}{n}k$ 로 두면

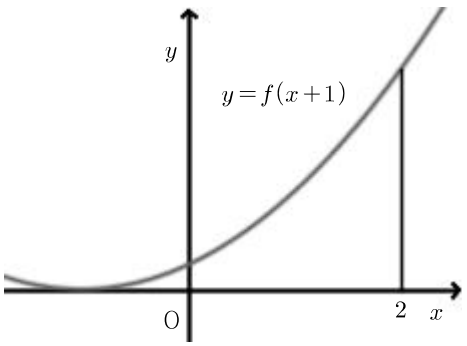
⇨ 적분 구간은 $[0, 0+2] = [0, 2]$, $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

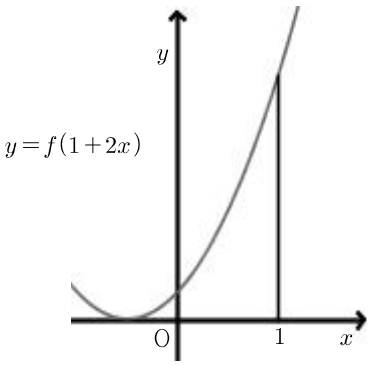
⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1 + \dfrac{2}{n}k\right)\dfrac{2}{n} = \int_0^2 f(1+x)\,dx$

(3) $x_k = \dfrac{1}{n}k$ 로 두면

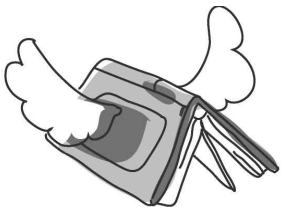
⇨ 적분 구간은 $[0, 0+1] = [0, 1]$, $\Delta x = \dfrac{1}{n}$

⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1 + \dfrac{2}{n}k\right)\dfrac{2}{n} = 2\int_0^1 f(1+2x)\,dx$







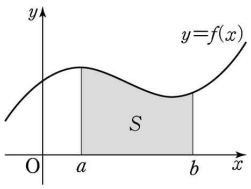


3. 정적분의 활용

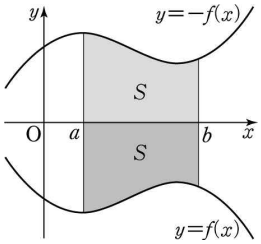
개념 1 곡선과 x축 사이의 넓이

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

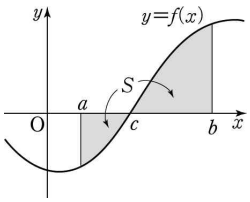
$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



$S=\int_a^b f(x)\,dx$



$S=$ _____

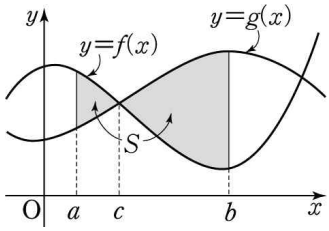


$S=$ _____

개념 2 두 곡선 사이의 넓이

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및
두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

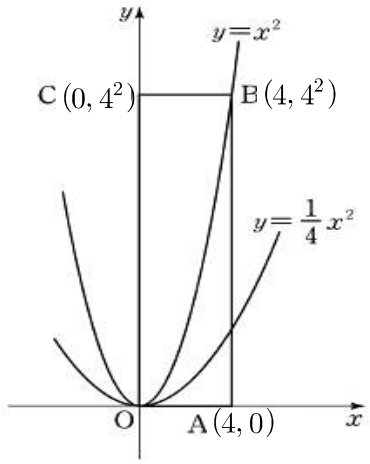
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



예) $S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+$ _____

기필코 유형 23 (2014학년도 9월 모의평가 13번 [3점])

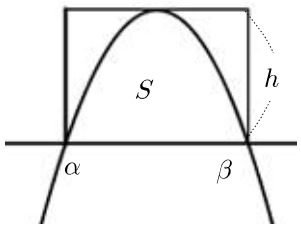
그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4^2)$, $C(0,4^2)$인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



Tip **기필코 유형 접근법 - 이차함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이**

이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$

$$=\frac{2}{3}(\beta-\alpha)h=\left|\frac{a(\beta-\alpha)^2}{6}\right|$$



포물선이 내접하는 직사각형의 넓이의 $\frac{2}{3}$가 S이다.

기필코 유형 24 (2014학년도 대수능 8번 [3점])

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



유형 정복

25 (2012학년도 9월 모의평가 10번 [3점])

곡선 $y=x^2-x+2$와 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

26 (2013학년도 대수능 28번 [4점])

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고, $\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

27 (2016학년도 9월 모의평가 14번 [4점])

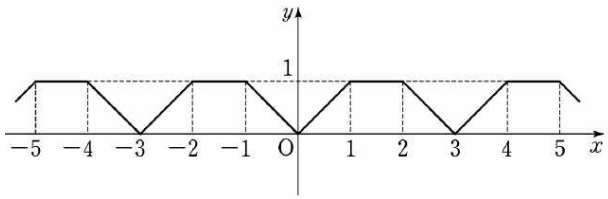
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

28 (2015학년도 대수능 20번 [4점])

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

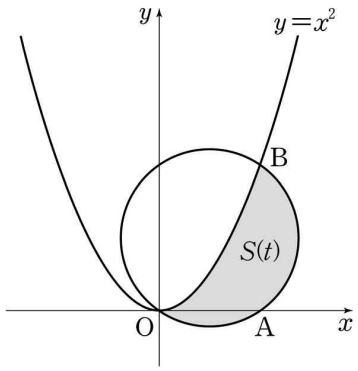
$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<2) \\ -x+3 & (2\le x<3) \end{cases}$$이다.

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=13$일 때, 상수 a의 값은?



29 (2013학년도 9월 모의평가 29번 [4점])

그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$ $\mathrm{A}(t,0)$, $\mathrm{B}(t,t^2)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y\le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)



개념 3 움직이는 점의 위치와 이동 거리

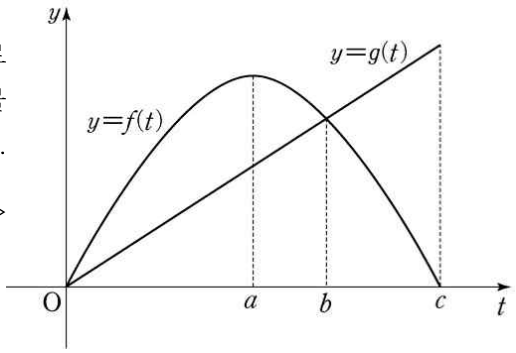
점 P가 (수직선 위를) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직일 때, 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치를 $f(a)$라고 하면

(1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

(2) 시각 $t=b$에서 점 P의 위치 $f(b)$는 $f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$이다.

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$이다.

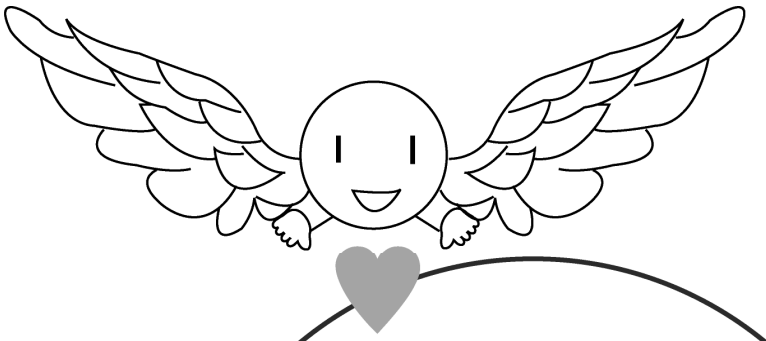
기필코 유형 30 (2012학년도 9월 모의평가 21번 [4점])



같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t\,(0\le t\le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이고 $0\le t\le c$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.



정 답

미적분 I

I 미적분 I을 위한 중학개념 + 고1개념

1. 다항식의 연산

1 $y=(x-1)^2+1$

2 $x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

3 $3(x-3)(x+1)$

4 $(x+2)(x-1)^2$

5 $x(x+a),\ x(x-2),\ (x-1)(x+1),\ a(a-6)$

6 $a(a-3),\ (x-5)(x+5)$

7 $3x(x-2)$

8 $-ax(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

9 $\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}$

10 $x(x-2),\ 3x(x-2),\ (a-2)^2$

11 $3(x-2)(x-4)$

12 $x^2(x+a)$

13 $6(x+2)(x-1)$

14 $(a-2)^2$

15 $(x-3)(x+3)$

16 $(x-2)(x+1)^2$

2. 수

17 6개

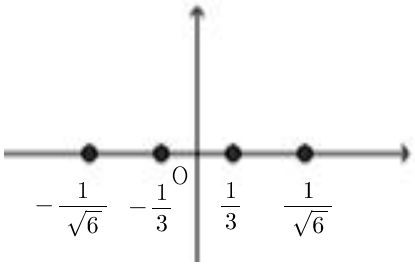
18 3

19 4

20 $(n+1)(n+2)$

21 첫째항 : $\frac{1}{2}$, 공비 : $\frac{1}{4}$

22



23 $\sqrt{2}-1,\ \frac{4\sqrt{2}+5}{7}$

24 $\frac{28n}{\sqrt{n^2+28n}+n}$

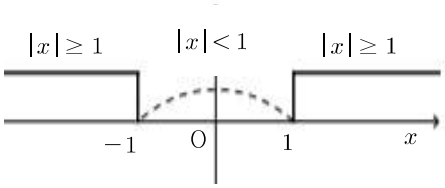
25 $\frac{x^2+a-4}{\sqrt{x^2+a}+2}$

26 $\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

27 $x \geq 1$이면 $|x-1|=(x-1)$,
$x<1$이면 $|x-1|=-(x-1)$

28 $\left|\frac{1}{3}t^3-t+\frac{41}{3}\right|$

29



30 $2\sqrt{n}$

3. 도형의 방정식

31 3^{n+1}

32 $\left(x, \frac{\log x}{2}\right)$

33 $3\sqrt{5}$

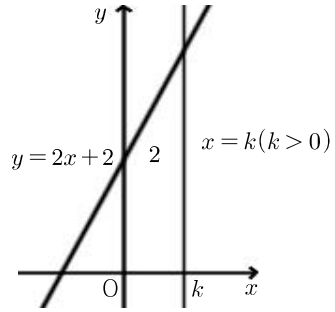
34 $\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}$

35 $\frac{2t^2+2t+1}{t^2+2t+1}$

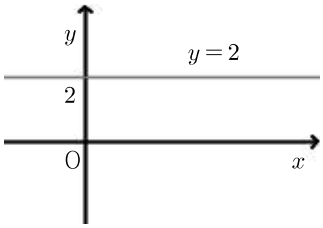
36 $g(t)=|-2t^3|=|2t^3|$

37 $f(t)=(1-t)t^2$

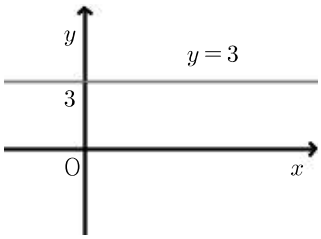
38



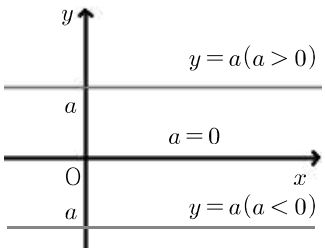
39



40



41



42 $(0, -2t^3)$

43 $y=x+12$

44 $\frac{4}{3}$

45 5

46 $b=6$, 기울기 2

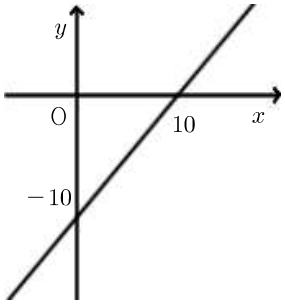
47 $y=10x+6$

48 5

49 12

50 $(0, 2t+1)$

51



52 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{3}t^3-t+\frac{41}{3}\right|$

53 1

4. 원의 방정식

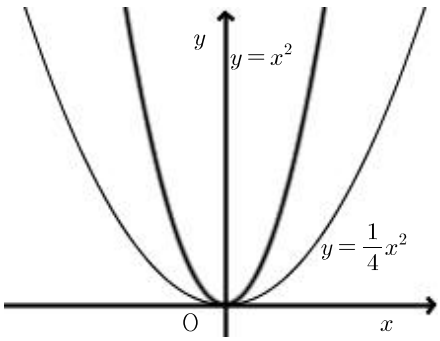
54 $(x-a_n)^2+(y-b_n)^2=(a_n)^2$

55 $\frac{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n}{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n}$

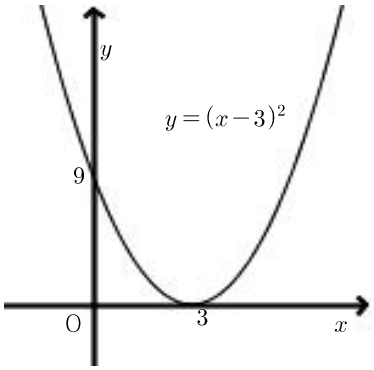
56 $x^2+y^2-x-y=0$

5. 이차함수와 이차방정식+이차부등식

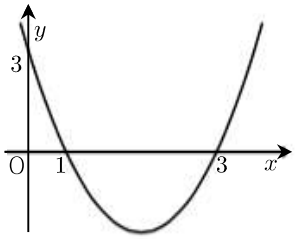
57



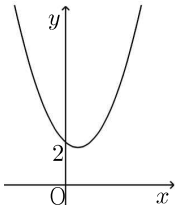
58



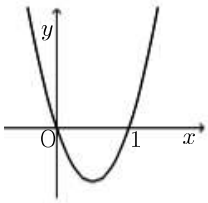
59



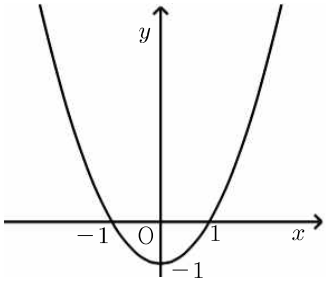
60



61



62



63 $f(x)=(x-3)(x-1)$

64 $f(x)=ax^2-1$

65 $x=-2$ 또는 $x=1$

66 $x=\pm\frac{1}{3}$

67 $x=1\pm\sqrt{3}$

68 $D<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

69 $t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

70 $a=-1$

71 $x=0$ 또는 $x=2$

72 $x=-1$ 또는 $x=3$

73 $x=2$ 또는 $x=4$

74 $a=2$

75 $t=0$ 또는 $t=4$

76 $a=0,\ b=-3n^2$

77 $a=-2,\ x^2-2x+1=(x-1)^2$

78 $a=-1$

79 $a=\frac{4}{3}$

80 $f(x)=(x-3)(x-2)$

81 2

82 $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

83 $a>-2$

84 $\left(\frac{2^n+2\cdot 4^n}{5},\ \frac{4^n-2^{n+1}}{5}\right)$

85 $3\sqrt{5}$

86 4개, 3개

87 4개

88 2개

89 $0<t<1$

90 $x=1$ 또는 $x=-2$

91 $t=1$

92 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-a}$

93 $x=0$ 또는 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

94 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

95 $x=-1$ 또는 $x=2$

96 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=4$

97 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

98 $t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

99 $t=4$ 또는 $t=-2$

100 $\frac{1}{2}<t<4$

101 $a=3$

102 $0 \le a \le 6$

103 $0 \le a \le 3$

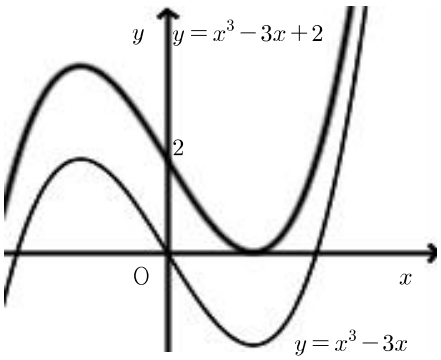
104 (1) $x<0$ 또는 $2<x$

(2) $x=10$ 또는 $x=2$

(3) $0<x<2$

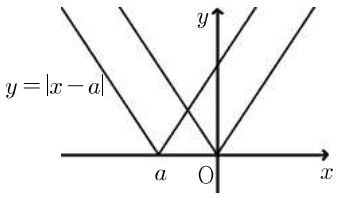
6. 함수의 그래프 이해하기

105

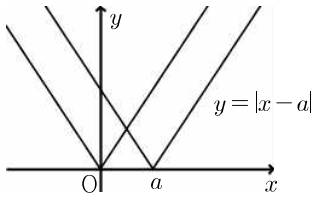


106

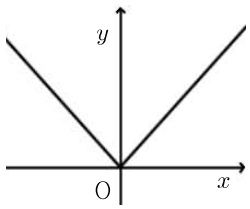
① $a<0$인 경우



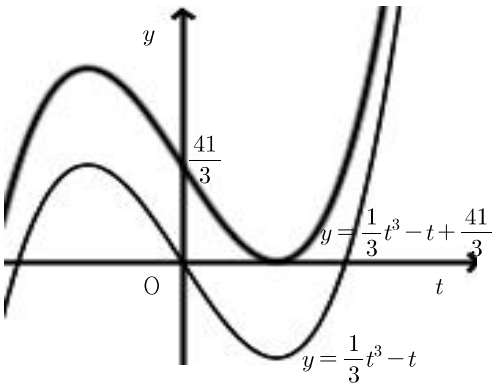
② $a>0$인 경우



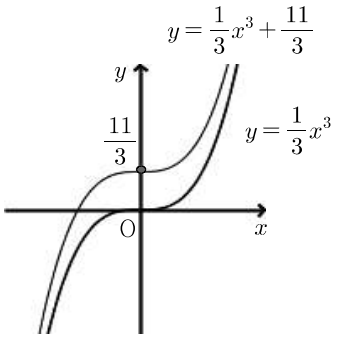
③ $a=0$인 경우



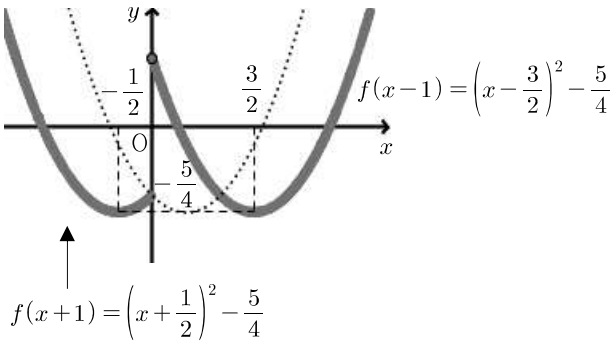
107



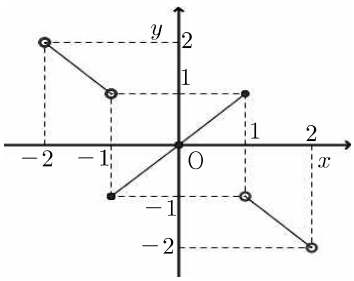
108



109



110

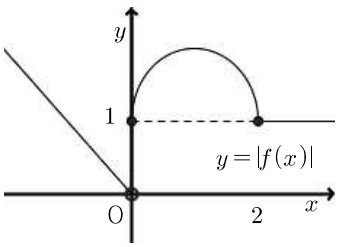


111 4개

112 $0<t<1$

113 $t=1$

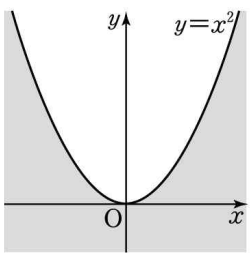
114



115 8

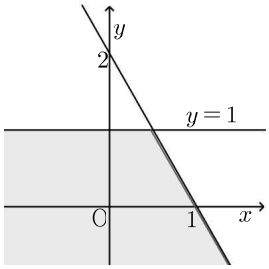
7. 부등식의 영역

116



117 55개

118



8. 삼각비와 원의 성질

119 $\frac{6}{5}\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$

120 $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{27}$

II 수열의 극한

1. 수열의 극한

1 $\frac{13}{4}$

2 $\frac{3}{2}$

3 $\frac{5}{3}$

4 $\frac{1}{8}$

5 3

6 5

7 4

8 $\frac{2}{3}$

9 $\frac{5}{2}$

10 12

11 2개

12 14

13 110

14 1

2. 등비수열의 극한

15 6

16 10

17 5

18 35

19 9

20 6

21 $2x+3$

22 6

23 3

24 30

25 10

26 33

3. 수열의 극한의 다양한 성질

27 15

28 $\frac{13}{4}$

29 35

4. 급수

30 1

31 5

32 $\frac{1}{2}$

33 $\frac{13}{4}$

34 9

35 54

36 $\frac{1}{6}$

37 $\frac{81}{8}$

38 $\frac{1}{6}$

39 $\frac{14}{9}$

40 $\frac{2(\pi-1)}{3}$

41 $\frac{32\pi}{23}$

42 $\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$

43 $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$

44 $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

45 $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

46 $\frac{40}{61}$

47 $\frac{3}{5}\pi$

48 $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

49 $\frac{5}{16}\pi$

50 $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$

51 $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

III 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한의 뜻과 성질

1 10

2 3

3 5

4 11

5 13

6 2

7 3차 이하 다항함수

8 2

9 3

10 27

11 16

12 10

13 11

14 $\frac{1}{4}$

15 $\frac{2}{3}$

16 3

17 7

18 10

19 4

20 4

21 4

22 2

23 0

24 ㄱ

25 ㄱ

26 3

27 0

28 4

29 2

30 3

31 5

32 4

33 4

34 5

35 -3

36 1

37 4

38 4

39 8

40 0

41 $\frac{1}{30}$

42 21

43 8

2. 함수의 연속의 뜻과 성질

44 4

45 7

46 11

47 ㄱ, ㄷ

48 11

49 ㄱ, ㄷ

50 -2

51 13

52 ㄱ, ㄷ

53 ㄱ, ㄴ, ㄷ

54 -1

55 8

56 ㄱ, ㄷ

57 4

Ⅳ 다항함수의 미분법

1. 미분계수

1 $3f'(1)$

2 14

2. 도함수

3 13

4 12

5 17

6 13

7 21

8 19

9 8

10 10

11 28

12 2

13 2

14 20

15 21

16 3

17 3

18 3

19 14

20 12

21 $\frac{1}{30}$

22 36

23 7

24 4

25 0

3. 도함수의 활용

26 12

27 $y=2x-3$

28 $y=-2x-4$, $y=6x+20$

29 13

30 1

31 12

32 5

33 $\frac{4}{3}$

34 6

35 $\frac{4}{3}$

36 5

37 $a=\pm\frac{4}{9}$, $b=0$

38 3

39 6

40 3

41 3

42 $\frac{11}{2}$

43 22

44 -10

45 16

46 13

47 2

48 ㄱ, ㄴ

49 8

50 5

51 4

52 $\frac{4}{27}$

53 6개

54 21

55 $3\sqrt{5}$

56 5

57 30

58 18

59 3

60 48

61 2

62 $\frac{1}{2}<t<4$

V 다항함수의 적분법

1. 부정적분

1 12

2 2

3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

4 13

2. 정적분

5 7

6 1

7 35

8 7

9 3

10 4

11 40

12 304

13 2

14 ㄴ

15 16

16 25

17 $\frac{2}{3}$

18 0

19 11

20 20

21 12

22 3

3. 정적분의 활용

23 16

24 $\frac{32}{3}$

25 $\frac{1}{6}$

26 40

27 $\frac{3}{2}$

28 10

29 13

30 ㄱ, ㄴ, ㄷ

MEMO

EBS 2TV
사교육비 경감
교육격차 해소



초·중·고 학습 프로그램
맞춤형 실용 영어교육 프로그램
다문화·통일교육 프로그램

시청 방법 | 전국 어디에서나 TV 안테나를 이용, 채널 10-2번으로 시청
※ EBS 홈페이지(www.ebs.co.kr) 및 모바일 앱(EBS TV)으로도 시청 가능

시청 문의 | 1588-1580[ARS ①번 → ⑦번 EBS2TV]

EBS

EBS

www.ebsi.co.kr

수능개념 수학

김소연의 희망날개 미적분 I



정가 7,500원

시험지원팀 & 인터넷 VOD 문의

교재 구입 문의

교재 내용 문의

김소연의 희망날개 미적분 I